TURÁN TÉTELKÖR

A témakörben az alábbi jellegű kérdéssel foglalkozunk:

Hány éle lehet egy n csúcsú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz részgráfként valamely adott H gráfot (illetve a $H_1, \dots, H_s$ gráfok egyikét sem)?

A témakör első eredményei Turán Pál előtt már ismertek voltak, azonban ő kezdeményezte a fenti téma szisztematikus vizsgálatát 1940 körül.

Mantel tétele (1907). *Ha az n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor éleinek száma $|E(G)| \leq n^2/4$.*

Mielőtt a bizonyításra rátérünk, jegyezzük meg, hogy ha n páros, akkor egy olyan teljes páros gráfnak, amelynek mindkét osztályában $n/2$ pontja van, éppen $n^2/4$ éle van, így az eredmény éles.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in V(G)$ két éllel összekötött csúcs (azaz $\{x, y\} \in E(G)$). Ekkor x-nek és y-nak nem lehet közös szonszédja, vagyis, ha $G(x)$ és $G(y)$ jelöli az x-szel illetve y-nal összekötött csúcsok halmazát, akkor $G(x)$ és $G(y)$ diszjunktak. Mivel $G(x)$ elemszáma éppen x foka, vagyis $d(x)$, így azt kapjuk, hogy

$$d(x) + d(y) \leq n, \quad \forall x, y \in V(G): \ \{x, y\} \in E(G).$$

Ez valójában egy $|E(G)| = e$ db egyenlőtlenségből álló egyenlőtlenség-rendszer. Ha ezeket összeadjuk, akkor a bal oldalon egy rögzített x csúcs foka annyiszor fordul elő, ahány vele összekötött y-t tudunk találni, vagyis $d(x)$-szer. Így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{x \in V(G)} (d(x))^2 \leq ne.$$

Mivel a fokszámok összege $2e$, alkalmazhatjuk a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenséget, ami szerint

$$\left(\sum_{x \in V(G)} d(x) \right)^2 \leq n \sum_{x \in V(G)} (d(x))^2.$$

Ebből a

$$4e^2 \leq n \cdot (ne)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből valóban $e \leq n^2/4$ következik. $\square$

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség helyett hivatkozhattunk volna arra is, hogy az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan konvex, így $f((x_1 + \ldots + x_k)/k) \leq (f(x_1) + \ldots + f(x_k))/k$, vagyis $(\sum d(x)/n)^2 \leq (\sum (d(x))^2)/n$.

Vizsgáljuk meg, mikor lehet egyenlőség a tételben. Ehhez kell, hogy minden fokszám azonos legyen (csak ekkor lehet egyenlőség a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben), és a kiindulási $d(x) + d(y) \leq n$ egyenlőtlenségben is egyenlőség legyen m inden $\{x, y\}$ élre. Általában is, ha egyetlen olyan $\{x, y\}$ élt találunk, amelyre $d(x) + d(y) = n$, már akkor is következik, hogy G páros gráf, amelynek két osztálya $G(x)$ illetve $G(y)$. Ennek felhasználásával $e = n^2/4$ csak úgy lehet, ha n páros és G teljes páros gráf két $n/2$ méretű osztállyal. Hasonlóan vizsgálhatjuk meg azt az esetet, amikor n páratlan. Ekkor az $e \leq n^2/4$ valójában azt jelenti, hogy $e \leq (n^2 - 1)/4$, és egyenlőség esetén G olyan teljes páros gráf, amelynek osztályai $(n+1)/2$ és $(n-1)/2$. Így kimondhatjuk a Mantel tétel alábbi kiegészítését.

Kiegészítés Mantel tételéhez. *Ha a háromszögmentes G gráf élszáma $[n^2/4]$, akkor G olyan teljes páros gráf, amelynek osztályai $n/2$ csúcsúak, ha n páros, $(n \pm 1)/2$ csúcsúak, ha n páratlan.* $\square$

A háromszög felfogható 3 hosszú körként és 3 csúcsú teljes gráfként is, ennek megfelelően kétféle általánosításra is lehetőség van. Természetes megnézni, hogy mi történik, ha a 4 hosszú kört zárjuk ki. Ezt a kérdést egy számelméleti probléma kapcsán Erdős Pál az 1930-as években vizsgálta meg.

Tétel. Ha az n csúcsú G egyszerű gráf nem tartalmaz részgráfként 4 hosszú kört (röviden G C_4-mentes), akkor élszámára

$$|E(G) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

teljesül.

Bizonyítás. Megszámoljuk kétféleképpen a gráfban a V betűket (cseresznyéket), vagyis az olyan élpárokat, amelyeknek egyik végpontja közös. Pontról pontra számolva a V betűk száma éppen $\sum_{x \in V(G)} \binom{d(x)}{2}$. Másrészt az nem fordulhat elő, hogy ugyanarra a pontpárra két V betűt is lehessen illeszteni, mert azok együtt C_4-et alkotnának. Így

$$\sum_{x \in V(G)} \binom{d(x)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

(a jobb oldal az összes pontpárok száma). Az élszámot e-vel jelölve, az egyenlőtlenséget 2-vel megszorozva és rendezve a

$$\sum_{x \in V(G)} (d(x))^2 - 2e \leq n(n-1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A Mantel tétel bizonyításához hasonlóan a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget használva ebből a

$$\frac{(2e)^2}{n} - 2e - n(n-1) \leq 0$$

adódik, amely az e-ben másodfokú

$$4e^2 - 2en - n^2(n-1) \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A bal oldali függvény grafikonja felfelé álló parabola, így e a két gyök között kell legyen. A tételben szereplő felső becslés jobb oldala éppen az egyenlet pozitív gyöke (a másik gyök negatív). $\square$

Látjuk, hogy lényeges különbség van a C_3 és a C_4 kizárása között. Az első esetben cn^2 él lehetett, a másodikban azonban ennél nagyságrendileg kevesebb. Ennek „okára" a Turán tétel után visszatérünk. A kizárt C_4 esetében nem nyilvánvaló, hogy a tétel éles-e. Mi annyit mutatunk csak meg, hogy legalábbis a nagyságrend (azaz a $cn\sqrt{n}$) helyes.

Példa (Klein Eszter). Páros gráfot fogunk készíteni, amely a szokásos koordinátageometria mod p változatát használja. A páros gráf két osztályát „pontoknak" és egyeneseknek" nevezzük ezen analógia miatt. Legyen p rögzített prímszám.

Pontok: az (x, y) párok, ahol x, y tetszőleges mod p maradékosztály

Egyenesek: a $[c]$ és a $[m, b]$ szimbólumok, amelyek szemléletesen az $x = c$ egyenletű „függőleges", valamint az $y = mx + b$ egyenletű ferde egyenesek analogonjai

Élek: az (x, y) pontot akkor és csak akkor kötjük össze a $[c]$ egynessel, ha $x = c$; (x, y) és $[m, b]$ között pedig pontosan akkor van él, ha $y = mx + b$. (Szóval az él azt fejezi ki, hogy a pont „rajta van" az egyenesen).

A definíció alapján nem nehéz belátni, hogy a pontok száma p^2, az egyeneseké $p + p^2$, páros gráfunknak pedig $p^2(p + 1)$ éle van. Ez utóbbihoz azt kell meggondolnunk, hogy mindent „pont"-nak $p + 1$ a foka (1 függőleges és p ferde egyenessel van összekötve), minden „egyenes" pedig p „ponttal" van összekötve. Ha $n = p + 2p^2$, akkor az élszám kb $n\sqrt{n}/\sqrt{2}$.

Az, hogy gráfunk nem tartalmaz C_4-et, abból következik, hogy ugyanazokkal a képletekkel lehet meghatározni két pont összekötő egyenesét, mint a valós euklidészi síkon, csak modulo p kell számolnunk. □

Mielőtt Turán tételére rátérnénk, idézzünk fel néhány dolgot. Egy gráf *r-kromatikus* vagy *r-osztályú*, ha csúcsai r nem-üres részre (osztályra) oszthatók úgy, hogy a részeken belül ne menjenek élek (az osztályok az egy-egy színnel színezett csúcsoknak felelnek meg). A páros gráfok éppen a 2 osztályú gráfok. Egy r-osztályú gráf *teljes*, ha a különböző részekbe eső csúcsok össze vannak kötve. Az első kérdés, amit meggondolunk, hogy melyik r-osztályú gráfnak van a legtöbb éle.

Lemma. *Az n csúcsú, r osztályú gráfok közül annak a teljes r-osztályú gráfnak van a legtöbb éle, amelyben bármely két osztály mérete legfeljebb eggyel tér el. Ez más szóval azt jelenti, hogy minden osztály mérete n/r alsó vagy felső egész része.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy a gráfnak *teljes* r-osztályú gráfnak kell lennie, a kérdés az osztályok mérete. Jelölje az osztályok méretét $n_1, \ldots, n_r$. Mivel véges sok lehetséges n_i-sorozat van, biztos van olyan, amelyre az élszám maximális. Tegyük fel, hogy két osztály mérete legalább 2-vel különbözik, mondjuk legyen $n_1 \geq n_2 + 2$. Tegyünk át egy csúcsot a második osztályból az elsőbe. Ekkor az eredeti r-osztályú teljes gráf és az áttétel utáni gráf élei csak kicsit különböznek, hisz csak az első két osztály csúcsai között menő élek változnak. Az eredetiben ezek száma n_1n_2, az újban $(n_1 - 1)(n_2 + 1)$. Ez utóbbi $n_1n_2 + (n_1 - n_2) - 1$, így nagyobb az eredeti élszámnál. Ez ellentmodás, azaz $|n_i - n_j| \leq 1$ minden i, j-re. □

Definíció. Az n csúcsú, r osztályú *Turán-gráf* az az (izomorfia erejéig egyértelmű!) teljes r-osztályú gráf, amelyben bármely két osztály mérete legfeljebb eggyel tér el egymástól. (Tehát ha pl. r osztja n-et, akkor minden osztály mérete n/r.) Az n csúcsú, r osztályú Turán gráfot $T(n,r)$ jelöli.

Ha $r = 2$, akkor a Turán gráf a Mantel tétel utáni fejtegetésben szereplő teljes páros gráf, amelynek osztályai $n/2$ csúcsot tartalmaznak, ha n páros, $(n+1)/2$ és $(n-1)/2$ csúcsot, ha n páratlan.

Írjuk fel a Turán-gráf élszámát, legalábbis abban az esetben, ha r osztja n-et. $T(n,r)$ komplementere r darab diszjunkt $K_{n/r}$, így $|E(T(n,r))| = \binom{n}{2} - r \cdot \binom{n/r}{2}$. Ez durván számolva $n^2/2 - r(n/r)^2/2 = (1-1/r)n^2/2$, vagyis a teljes gráf élszámának durván az $(1-1/r)$-szerese. A nagyságrend nem változik akkor sem, ha r nem osztója n-nek.

Turán tétele arra a kérdésre ad választ, hogy egy n csúcsú gráfnak hány éle lehet legfeljebb, ha nem tartalmaz K_{r+1}-et (azaz teljes $r+1$ csúcsú részgráfot). Vegyük észre, hogy egyetlen r osztályú gráf sem tartalmazhat K_{r+1}-et. Valóban, ha lenne a gráfban K_{r+1}, akkor a skatulyaelv szerint egy K_{r+1}-nek két csúcsa azonos osztályba esne, de akkor nem lehetne összekötve, ellentmondás. Így a kérdés az, hogy lehet-e egy K_{r+1}-et nem tartalmazó gráfnak $T(n,r)$-nél több éle.

Turán tétele. *Ha az n csúcsú G gráf nem tartalmaz K_{r+1}-et részgráfként, akkor legfeljebb annyi éle lehet, mint a $T(n,r)$ Turán gráfnak. Ha G-nek éppen ennyi éle van, akkor G nem lehet más, mint $T(n,r)$.*

Bizonyítás. Csak a felső becslést bizonyítjuk, az egyenlőség leírását nem, de a bizonyításból meggondolható lenne. A most leírt bizonyítás Erdős Páltól származik. Azt fogjuk megmutatni, hogy van olyan r-osztályú H gráf, amely G csúcsain van definiálva (azaz $V(G) = V(H)$) és amelyre minden csúcs G-beli foka legfeljebb akkora, mint az illető csúcs H-beli foka (formálisan: $d_G(x) \leq d_H(x)$ minden $x \in V(G)$-re). Ebből már következik, hogy H-nak legalább annyi éle van, mint G-nek, hiszen a fokszámok összege az élszám kétszerese.

Válasszunk ki egy v maximális fokú csúcsot, és jelölje N a v-vel össze nem kötött csúcsok halmazát. Készítsük el G-ből az alábbi G^v gráfot: töröljük ki az esetlegesen N-en belüli éleket, és N minden csúcsát kössuk össze $V(G) \setminus N$ minden csúcsával. A $V(G) \setminus N$ csúcsai közti éleket ne változtassuk.

A kapott G^v gráfban továbbra sincs K_{r+1}, mert ha lenne, akkor $V(G) \setminus N$-ben lenne K_r. Ekkor viszont az eredeti G-ben ehhez hozzávéve v-t, K_{r+1}-et kapnánk. Másrészt viszont minden x pontra a G^v-beli fokszám legalább akkora, mint a G-beli. Ez N pontjaira amiatt teljesül, hogy v fokszáma maximális volt, az $x \in V(G) \setminus N$-beli pontokra pedig azért, mert a $V(G) \setminus N$-beli éleket nem változtattuk, és G-ben korábban x nem feltétlen volt minden N-beli ponttal összekötve.

Ezután ugyanezt az eljárást folytatjuk a G gráf $V(G) \setminus N$ pontjai által feszített részgráfjára. Ebben a gráfban korábbi megjegyzésünk szerint nincsen K_r. Ha precízek vagyunk, akkor ezt r szerinti indukcióval lehetne megfogalmazni: a $V(G) \setminus N$ csúcshalmazon van olyan G^* $(r-1)$-osztályú gráf, amelynek fokszámai legalább a G gráf $V(G) \setminus N$ pontjai által feszített részgráfjának fokszámai. Ennek a G^*-nak a pontjait kötjük össze N pontjaival, így kapjuk a G^v gráfot. □

Ha a kizárt H gráf kromatikus száma $r+1$, akkor H nem fordulhat elő a $T(n,r)$

Turán-gráfban. Ha ugyanis részgráfja lenne $T(n,r)$-nek, akkor H-ban a Turán-gráfban azonos osztályba eső csúcsokat azonos színre színezve H-nak egy r színnel való színezését kapnánk. Ebből azt láthatjuk, hogy ha $\chi(H) = r+1$, akkor a legtöbb élű H-t nem tartalmazó gráfnak legalább annyi éle van, mint a $T(n,r)$ Turán-gráfnak. Erdős–Stone–Simonovits mutatták meg, hogy ez aszimptotikusan így is van, a legtöbb élű H-t nem tartalmazó gráf e élszámára

$$e \sim \frac{\chi(H)-2}{2(\chi(H)-1)} n^2,$$

ha $\chi(H) \geq 3$.