Tudnivalók a Véges matematika 1 és 2 vizsgáról

Az elégséges (2) jegy *szükséges és elégséges feltétele* az összes fogalom és tétel helyes ismerete (a kérdezett definíciók és tételek/lemmák/állítások pontos kimondása) és az ezek közötti összefüggések értése. Jobb érdemjegyhez az is szükséges, hogy a vizsgázó egy témakör kidolgozása során a tanult bizonyítások ismeretéről is számot adjon.

A vizsga menete

A Teams-ben létrehozunk csevegéseket, egy vizsga alkalmával hármat: két vizsgacsevegést, ahol két-két oktató van (ezek lesznek a tényleges vizsgáztatás helyei), és egy felkészülési csevegést. A csevegésekben videóhívásokat fogunk indítani, ezekbe kell majd becsatlakoznia a vizsgázónak. A felkészülési csevegésbe előzetesen minden aznapi vizsgázó meghívást kap. A vizsga kezdetén két vizsgáztató meghív a vizsgacsevegésébe egy vizsgázót. Feltesz neki kb. három rövid, könnyű, azonnal megválaszolandó beugrókérdést (tipikusan definíció, tételkimondás). Ha ez sikertelen, vége a vizsgának. Ha sikeres, a vizsgázó átmenetileg elhagyja ezt a beszélgetést, és bejelentkezik a felkészülési csevegésbe. Ott a felkészülést felügyelő oktatótól kap egy témakört, melynek (vázlatos) kidolgozására minimum 15 perc áll rendelkezésére. Ezután valamelyik vizsgáztatópáros visszahívja a vizsgacsevegésébe, ahol max. kb. 20 percben videóbeszélgetés keretében vizsgázik a témakörből. A kialakult érdemjegyet a szabályzatnak megfelelően még a vizsga alatt (nyilván a végén) beírják az oktatók a neptunba. ***A vizsgázó köteles a vizsga teljes tartama alatt (beugró, felkészülés, témakörből való vizsgázás) bekapcsolva tartani a mikrofont és a kamerát. A vizsgázás során semmilyen segédeszköz használata nem megengedett***.

Véges matematika 1 keresztfélév: a tematika Szőnyi Tamás honlapján (https://szonyitamas.web.elte.hu/tematika.html), segédanyagok Szőnyi Tamás honlapján (https://szonyitamas.web.elte.hu/seged1.html), a Teams-ben az előadás csoportjánál a Fájlok között, illetve a (https://drive.google.com/drive/folders/12CTQ_eO8Hv65vSfZpaoNlw4jEjB6qmgK?usp=sharing) linken érhetők el.

Véges matematika 2: A tematika alább, segédanyagok Szőnyi Tamás honlapján (https://szonyitamas.web.elte.hu/seged2.html), a Teams-ben az előadás csoportjánál a Fájlok között, illetve a (https://drive.google.com/drive/folders/13sCU_RltrtrFffkRDlTfVo1FLm5zAj0r?usp=sharing) linken érhetők el. Tanárszakosoknak a kiegészítő anyagokhoz segédanyagok Szőnyi Tamás honlapján (https://szonyitamas.web.elte.hu/okt.html) érhetők el.

Idéznénk néhány, ide vonatkozó mondatot az ideiglenes TVSZ-ből, a 27. pontból, mert a szabályos vizsga technikai feltételeit megteremteni előkészületeket igényelhet a hallgatók részéről is:

A szóbeli vizsga alapkövetelménye a hallgató és vizsgáztató közötti egyidejű hang- és képi kapcsolat. Tehát kötelező működő, bekapcsolt mikrofonnal ***és*** kamerával rendelkezni! Enélkül nem szabályos a szóbeli vizsga. Ha valakinek nincs kamerája, gondoskodnia kell róla, hogy szerezzen egyet a vizsgára (pl.

kölcsönkér), vagy más eszközön keresztül (pl. okostelefon) vizsgázzon, ha mondjuk csak webkamerája nincs a laptopján, amit általában használni szeret.

A szóbeli számonkérés megkezdése előtt a hallgató személyazonosításra alkalmas igazolványának bemutatására kötelezhető. – Kérjük, készítsék elő!

A szóbeli számonkérés során fül- vagy fejhallgatót a hallgató nem használhat. -- Sokan headsetet használnak, ami ez alapján tilos!

A hallgató a vizsga elején vagy akár annak során bármikor kötelezhető a környezete bemutatására.

Ez már nem a TVSZ, de szeretnénk hangsúlyozni: Ha valakinek speciális helyzete / szükséglete / problémája van, köteles idejében jelezni. (Pl. spec. szükségletű hallgatónál esetenként segítő személy jelenlétét engedi a TVSZ.)

A vizsga során a tételek (Véges matematika 1), illetve a kilenc témakör (Véges matematika 2) *akár mindegyikéből* kell kérdésekre válaszolni, ezek alább láthatóak. A Véges matematika 2 **tanárszakos** hallgatók számára néhány kiegészítő anyagrész is szerepelt, ezeket ***TSZ kieg:*** jelzi, ők a „rendes" kifejtendő tételük mellé ezek közül további kérdést is kaphatnak. Ahogy föntebb is írtuk, a vizsgázó először 3-4 „beugrókérdés"-re kell, hogy válaszoljon, lényegében „kapásból". Kisebb pontatlanságok kijavításához kisebb segítséget nyújtanak a vizsgáztatók, de ezek mindegyikét lényegében helyesen meg kell tudni válaszolni, a vizsgáztatók ellenőrző „keresztkérdést" is feltehetnek. Ha a vizsgázó valamelyik beugrókérdésre a rendelkezésére álló legfeljebb 10-15 perc alatt sem tud értékelhető helyes választ adni, akkor a vizsgájának érdemjegye elégtelen (1).

Ha a vizsgázó mindegyik beugrókérdést helyesen megválaszolta, akkor elkezdheti a kifejtendő téma kidolgozását, amire kb. 15 perc áll a rendelkezésére. Miután írásban felvázolta a témáját, azt szóban előadja a vizsgáztatóknak, akik azzal kapcsolatban kérdéseket tesznek fel a vizsgázónak.

Ha a vizsgázó minden kérdezett fogalmat és állítást korrektül ki tudott mondani, és a vizsgáztató által feltett szóbeli kérdésekre adott válaszaival azt is bizonyította, hogy érti a kimondott fogalmakat és állításokat, akkor az érdemjegye legalább elégséges (2). Ha ezen felül a témájának *tételeit bizonyítani* is tudja, akkor a szóbeli felelete során nyújtott teljesítménye alapján jobb érdemjegyet kap. Aki lényegében minden kérdésre helyesen válaszol, és minden tételt megfelelően bizonyít, az természetesen jeles (5) érdemjegyet kap.

A tipikus hibákat érdemes elolvasni a http://www.cs.elte.hu/~sziklai/vmtiphib.html linken.

Véges matematika 1: beugrókérdés típusok

1. Hányféleképpen állíthatunk sorba k különböző tárgyat?
2. Hányféleképpen állíthatunk sorba f (különböző) fiút és l lányt?
3. Hányféle sorozatot képezhetünk n db „a", m db „b" és k db „c" betűből?

4. Hányféleképpen húzhatunk egy 32 lapos magyar kártyából egymás után 5 lapot?
5. Hányféleképpen lehet kitölteni a LOTTÓ szelvényt (90 szám, 5-öt jelölünk meg)?
6. Hányféle n hosszú sorozatot képezhetünk az „a,b,c,d,e” betűkből?
7. Hány olyan 0-1 sorozat van, amelyben k db „0” szerepel (k<n)?
8. Hányféleképpen oszthatunk szét n db egyforma gesztenyét k (különböző) embernek?
9. Hányféleképpen oszthatunk szét n db egyforma gesztenyét k (különböző) embernek, ha mindenki kap legalább egyet?
10. Definiálja az „n alatt a t” binomiális együtthatót!
11. Definiálja az n!-t!
12. Mennyi „8 alatt a 3”?
13. Mennyi „6!”?
14. Mondja ki a binomiális tételt!
15. Mondjon egy olyan azonosságot a Pascal-háromszög elemeire, amiben különböző sorokból vett elemek szerepelnek!
16. Mennyi a Pascal-háromszög n-edik sorában levő elemek összege?
17. Mennyi a Pascal-háromszög n-edik sorában levő elemek váltakozó előjelű összege?
18. Fogalmazza meg a szita-formulát!
19. Fogalmazza meg a skatulya-elvet!
20. Mondjon egy példát a szita-formula alkalmazására!
21. Mutasson egy példát a skatulyaelv alkalmazására!
22. Hogyan definiáljuk a Fibonacci-számokat?
23. Mondjon egy (a definiáló rekurziótól különböző) azonosságot Fibonacci-számokra!

1. Milyen összefüggés van egy gráf élszáma és a csúcsok fokszámai között?
2. Definiálja az út fogalmát!
3. Definiálja a vonal fogalmát!
4. Mikor nevezünk egy gráfot összefüggőnek?
5. Mi a fa definíciója?
6. Hány éle van (legalább) egy összefüggő gráfnak?
7. Hány éle van egy n csúcsú fának?
8. Hány éle van egy n csúcsú teljes gráfnak?
9. Mi a komponens definíciója?
10. Hány éle lehet egy körmentes gráfnak?
11. Mi az a feszítő részgráf?
12. Milyen gráfoknak van feszítő fája?
13. Milyen gráfoknak van feszítő útja?
14. Mit nevezünk Hamilton-körnek?
15. Milyen szükséges feltételt ismer Hamilton-kör létezésére?
16. Milyen elégséges feltételt ismer Hamilton-kör létezésére?
17. Definiálja az Euler-körvonal (zárt Euler-vonal) fogalmát!
18. Definiálja az Euler-vonal (nyílt Euler-vonal) fogalmát!
19. Mit mond Euler tétele Euler-körvonal (zárt Euler vonal) létezéséről?
20. Ismer-e szükséges és elégséges feltételt Euler-körvonal (zárt Euler vonal) létezéséről?
21. Mikor nevezünk egy gráfot síkbarajzolhatónak?
22. Hány éle lehet egy síkbarajzolható n csúcsú gráfnak?

23. Mondja ki az Euler-formulát!
24. Mondjon három példát síkba nem rajzolható gráfokra!
25. Mi egy gráf továbbosztása (soros bővítése)?
26. Mit mond Kuratowski tétele?
27. Definiálja az élkromatikus szám fogalmát!
28. Definiálja a kromatikus szám fogalmát!
29. Milyen összefüggés van a maximális fokszám és a kromatikus szám között?
30. Milyen összefüggés van a maximális fokszám és az élkromatikus szám között?
31. Mit tudunk síkbarajzolható gráf kromatikus számáról?

Véges matematika 2: A kilenc témakör

Hálózati folyamok. Hálózat fogalma, forrás, nyelő. Élek kapacitása, hálózat kapacitása. Folyamfeltételek, megengedett folyam, folyam értéke. Vágás (s–t-vágás) fogalma, vágás kapacitása (értéke). Bármely folyam értéke kisebbegyenlő bármely vágás kapacitásánál. Maximális folyam keresése javító úttal; javítóút-kezdemény. Maximális folyam–minimális vágás tétele. Egészértékűségi lemma (ha minden él kapacitása egész szám, akkor a maximális folyamok között biztos van olyan, ami. . .).

Párosítások. Teljes és részleges párosítás (független élhalmaz) definíciója *tetszőleges* gráfban. Kétosztályú („páros") gráf fogalma. Frobenius tétele teljes párosítás létezésére páros gráfokban. Kőnig tétele r-reguláris páros gráfokról (mi köze van ennek az élszínezési számhoz). A Hall-feltétel és Hall tétele. Javító utak, majdnem javító utak, algoritmus maximális független élrendszer keresésére (bizonyítás nélkül). Párosítás tetszőleges gráfban: Tutte tétele (triviális irány bizonyítással, nemtriviális irány bizonyítás nélkül). Deficites Hall-tétel (mit tudunk, ha a Hall-feltétel d híján teljesül). ***TSZ kieg:*** Stabil párosítások, a Gale-Shapley algoritmus.

Gráfparaméterek. Független ponthalmaz, éleket lefogó ponthalmaz, független élhalmaz (párosítás), pontokat lefedő élhalmaz definíciója. Független csúcshalmaz és lefogó csúcshalmaz komplementere micsoda? Pontokat lefedő élhalmaz mikor létezik, és mikor nem? Gráfparaméterek (α, τ, ν és ρ) definíciója. Gráfparaméterek közötti egyenlőtlenségek. Gallai két tétele (az egyik a pontokra, a másik az élekre vonatkozó) gráfparaméterek közötti kapcsolatokról. Kőnig tétele független élek maximális számáról és lefogó pontok minimális számáról bizonyos gráfokban.

Többszörös összefüggőség. Menger tétele két pont közötti éldiszjunkt utak számára. Menger tétele két pont közötti pontdiszjunkt utak számára. (Itt nem voltak bizonyítások, csak a fogalmakat kell tudni, illetve a tételek kimondását érteni.) A k-szoros (csúcs)összefüggőség fogalma és az összefüggőségi szám (κ) definíciója (mi a különbség?). A k-szoros élösszefüggőség fogalma és az élösszefüggőségi szám (κ') definíciója (mi a különbség?). Összefüggés κ és κ' között. Többszörös pontösszefüggőség (illetve élösszefüggőség) kapcsolata a két tetszőleges pont közötti pontdiszjunkt (éldiszjunkt) utak számával. Kétszeres összefüggőség és két ponton/élen átmenő kör létezése közötti kapcsolat.

Lineáris rekurziók. Állandó együtthatós lineáris rekurziók megoldása mértani sorozatok lineáris kombinációjaként. A karakterisztikus egyenlet, többszörös gyökök. Ötletek a rekurzió felállítására. ***TSZ kieg:*** generátorfüggvényes megoldás. (anyag pl. SzT honlapján)

Catalan számok. Tükrözési elv, Catalan-számok (a „Sor a pénztárnál" feladat kétféle szemléltetése). A probléma megfogalmazása $+1/-1$ elemű sorozatokkal. A Catalan-számok explicit képlete. Rekurzió a Catalan-számokra. Catalan-számokra vezető nevezetes feladatok: pl. konvex n-szög háromszögekre bontása, elég egy példánál tudni a rekurzió felírásának bizonyítását. ***TSZ kieg:*** A Catalan-számok generátorfüggvénye. (anyag pl. SzT honlapján, vagy KRS 7.5, de ott MÁS a def.!!!)

Ramsey tételkör. Ramsey tétele a teljes részgráf/üres részgráf megfogalmazásban, illetve a teljes gráf éleinek színezésével. Az $R(k,l)$ Ramsey-szám definíciója. $R(3,3)$ meghatározása, $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$ bizonyítása, ennek segítségével a binomiális együtthatós felső becslés. (A becslés általában nem éles, gyakorlaton volt: $R(3,4) = 9$.) Milyen jellegű következtetést vonhatunk le egy konkrét színezésből? Alsó becslés $R(k,k)$ méretére (ami gyakorlaton volt). Többszínű Ramsey-tételek, $R(3,3,3) \leq 17$, felső becslés az $R(3,3,\ldots,3)$-ra (n darab hármas). Felső becslések többszínű Ramsey-számokra (nemcsak csupa hármas esetén): színösszevonás, illetve a sok 3-as bizonyítás lemásolása. Schur tétele (r-színnel színezve az első n pozitív egész számot legalább mekkora legyen az n, hogy biztosan legyen három egyszínű x, y és z, amikre $x + y = z$?).

Turán tételkör. Extremális kérdések a gráfelméletben. Mantel tétele háromszögmentes egyszerű gráf élszámáról. Kiegészítés Mantel tételéhez (hogy milyen gráfokra teljesülhet egyenlőséggel). Felső becslés négy-hosszú kört nem tartalmazó gráfok élszámára. Teljes (és nem feltétlenül teljes) r osztályú gráfok. Az n pontú, r osztályú $T(n,r)$ Turán-gráf definíciója. Az r osztályú gráfok között a Turán-gráf élszáma a legnagyobb. A probléma felvetése kizárt H részgráfra. Turán tétele kizárt K_{r+1} részgráfra (bizonyítás nélkül). ***TSZ kieg:*** Klein Eszter példája sok élt tartalmazó, de négyhosszú kört nem tartalmazó páros gráfra: koordináta-geometria modulo p. Zarankiewicz problémája. (anyag SzT honlapján, EB 10.3, LPV 14.1, 14.2 motivációt ad a geometriákhoz)

Halmazrendszerek. Sperner-rendszer definíciója, Sperner tétele (Sperner-rendszer maximális elemszámáról), LYM (YBL M) egyenlőtlenség (Sperner-rendszer elemeinek méreteit tartalmazó képlet). Metsző halmazrendszer definíciója, Erdős–Ko–Rado tétele (egyforma méretű halmazokat tartalmazó, metsző halmazrendszerek maximális méretéről) bizonyítás nélkül. ***TSZ kieg:*** A Sperner tétel második biz. Lineáris algebrai módszerek alkalmazása gráfokra: adott bőségű reguláris gráfok, a Hoffman-Singleton tétel 5 bőség esetére.

Beugrókérdés-típusok

A következő felsorolás témakörönként bemutatja, hogy milyen ***jellegű*** beugrókérdésekre lehet az adott témából számítani. A felsorolás *nem teljeskörű*: egyes feladatok csak típusfeladatok, a konkrét feladatsorokon más-más konkrét formában (más-más adatokkal) szerepelnek.

A hálózati folyamok témakörébe tartozó beugrókérdések

1. Definiálja a „hálózati folyam" fogalmát!

2. Mit nevezünk egy folyam értékének? (Definíció.)

3. Vágás (s–t-vágás) definíciója hálózatban.

4. Mit nevezünk egy vágás kapacitásának (más szóval értékének)? (Definíció.)

5. Mondja ki a maximális folyam–minimális vágás tételét!

6. Mit nevezünk egy hálózati folyamhoz tartozó javító segédgráfnak? (Definíció.)

7. Mit nevezünk egy hálózati folyamot javító útnak? (Definíció.)

8. Mondja ki a folyamokra vonatkozó egészértékűségi lemmát! (Ha minden él kapacitása egész szám, akkor a maximális folyamok között biztos van olyan, ami...)

A párosítások témakörébe tartozó beugrókérdések

9. Definiálja a (nem feltétlenül teljes) párosítást! Mi köze van ennek valamelyik gráfparaméterhez?

10. Definiálja a teljes párosítást (tetszőleges gráfban)!

11. Mit mond Frobenius tétele teljes párosításokról? (Mondja ki a tételt!)

12. Mit mond Kőnig tétele r-reguláris páros gráfokról (mi köze van ennek az élszínezési számhoz)? (Mondja ki a tételt!)

13. Mit mond Hall tétele párosításokról páros gráfokban? (Mondja ki a tételt!)

14. Mi az a javító út párosítások témakörében? (Definíció.)

15. Mondja ki a deficites Hall-tételt (ha a Hall-feltétel d híján teljesül)!

16. Mondja ki Tutte tételét teljes párosítás létezéséről nem (feltétlenül) kétosztályú gráfban!

A gráfparaméterek témakörébe tartozó beugrókérdések

17. Mit nevezünk független élhalmaznak, és mit nevezünk párosításnak? (Definíció.)

18. Mit nevezünk független csúcshalmaznak? (Definíció.)

19. Mit nevezünk (a csúcsokat) lefedő élhalmaznak? (Definíció.)

20. Mit nevezünk (az éleket) lefogó csúcshalmaznak? (Definíció.)

21. Milyen kapcsolat van a legnagyobb független ponthalmaz mérete és a legkisebb lefedő élhalmaz mérete között? (Írja fel az egyenletet/egyenlőtlenséget!)

22. Milyen kapcsolat van a legkisebb lefogó ponthalmaz mérete és a legnagyobb független élhalmaz mérete között? (Írja fel az egyenletet/egyenlőtlenséget!)

23. Mondja ki a pontokra vonatkozó Gallai-tételt (az α és τ közötti összefüggésről)!

24. Mondja ki az élekre vonatkozó Gallai-tételt (a ν és ρ közötti összefüggésről)!

A többszörös összefüggőség témakörébe tartozó beugrókérdések

25. Mit jelent az, hogy egy gráf k-szorosan pontösszefüggő? (Definíció.)
26. Definiálja a csúcsösszefüggőségi szám (κ) fogalmát!
27. Mikor nevezünk k-szorosan élösszefüggőnek egy gráfot? (Definíció.)
28. Definiálja az élösszefüggőségi szám (κ^0) fogalmát.
29. Milyen kapcsolat van a k-szoros csúcsösszefüggőség és a k-szoros élösszefüggőség között?
30. Mutasson olyan egyszerű gráfot, amelynek minden fokszáma 4, élösszefüggőségi száma 3 és pontösszefüggőségi száma 2!
31. Mutasson példát ötszörösen élösszefüggő, de nem háromszorosan csúcsösszefüggő gráfra!
32. Mondja ki Menger tételét két csúcs közötti éldiszjunkt utak számáról!

A lineáris rekurziók témakörébe tartozó beugrókérdések

33. Mit nevezünk másodrendű, állandó együtthatós lineáris rekurziónak? (Definíció.)
34. Mi egy állandó együtthatós lineáris rekurzió karakterisztikus egyenlete? (Definíció.)
35. Adja meg annak a másodrendű lineáris rekurziónak a megoldását, aminek karakterisztikus egyenletének két gyöke $q_1 = 2$ és $q_2 = 3$, továbbá az első két eleme $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$.
36. Adja meg annak a másodrendű lineáris rekurziónak a megoldását, aminek karakterisztikus egyenletének a $q_1 = q_2 = 2$ kétszeres gyöke, továbbá az első két eleme $a_0 = 2$ és $a_1 = 3$.
37. Írjon fel olyan lineáris rekurziót, amelynek $a_n = 5 \cdot n \cdot 2^n$ a megoldása!
38. Írjon fel olyan rekurziót, amelynek $a_n = 3 \cdot 2^n + 3 \cdot (-2)^n$ a megoldása!
39. Lehet-e $a_n = n^3$ állandó együtthatós másodrendű lineáris rekurzió megoldása?

A Catalan-számok témakörébe tartozó beugrókérdések

40. Írja le az n-edik Catalan-szám (C_n) explicit képletét!
41. Mondjon egy Catalan-számokra vezető feladatot!
42. Milyen rekurziónak tesznek eleget a Catalan-számok?

A Ramsey–tételkörbe tartozó beugrókérdések

43. Fogalmazza meg Ramsey tételét két színre!
44. Definiálja az $R(k,l)$ Ramsey számot!

45. Mit jelent az, hogy $R(4,4) = 18$?

46. Adjon egy (vagy rekurzív, vagy explicit) felső becslést az $R(k,l)$ Ramsey számra!

47. Mondja ki Ramsey tételét három színre!

48. Definiálja az $R(a,b,c)$ Ramsey-számot!

49. Mit jelent az, hogy $R(3,3,3) = 17$?

50. Mondja ki Schur tételét az $x + y = z$ egyenletet kielégítő egyszínű számhármasokról!

A Turán–tételkörbe tartozó beugrókérdések

51. Hány éle lehet egy háromszöget nem tartalmazó n csúcsú egyszerű gráfnak? (Mondja ki Mantel tételét!)

52. Mit nevezünk r-osztályú gráfnak; és mit nevezünk teljes r-osztályú gráfnak? (Definíciók.)

53. Definiálja a $T(n,r)$ Turán-gráfot!

54. Mondja ki Turán tételét K_{r+1}-et nem tartalmazó gráf élszámáról!

55. Hány éle van a $T(10,5)$ Turán-gráfnak?

56. Rajzolja le a $T(11,4)$ Turán-gráfot!

A halmazrendszerek témakörébe tartozó beugrókérdések

57. Mit nevezünk Sperner-rendszernek? (Definíció.)

58. Mondja ki Sperner tételét Sperner-rendszerek maximális méretéről!

59. Mondjon egy példát maximális méretű Sperner-rendszerre páros ($2n$) elemszámú alaphalmaz esetén!

60. Mondjon egy példát maximális méretű Sperner-rendszerre páratlan ($2n +1$) elemszámú alaphalmaz esetén!

61. Mit nevezünk metsző halmazrendszernek?

62. Mondja ki Erdős–Ko–Rado tételét azonos méretű halmazokat tartalmazó metsző halmazrendszerekről!