A logikai szita-formula

Kezdjük egy szokásos középiskolai feladattal:

Egy osztályban 37 gyerek tanul. Közülük angolul 27-en, németül 15-en, mindkét nyelven 10-en beszélnek. Hány olyan gyerek van, aki sem angolul, sem németül nem tud?

A szokásos megoldás, hogy kiszámoljuk a csak németül ill. csak angolul beszélő gyerekek számát; ez 5 ill. 17. Ezután ezeket, valamint a mindkét nyelven beszélő gyerekek számát levonjuk az osztálylétszámból. Azaz az egyik nyelven sem beszélő gyerekek száma 37-5-17-10=5. Persze ezt az eredeti adatokkal is kifejezhettük volna, akkor a megoldás 37-27-15+10=5 alakban adódna.

Ugyanezt a kérdést teljes általánosságban megoldja a **logikai szita-formula**.

Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ adott tulajdonságok (pl. a_1 az, hogy az illető beszél-e angolul, a_2 az, hogy beszél-e németül, stb.), melyekkel az N különböző objektum (a példában az osztály tanulói) rendelkezhetnek. Azt akarjuk kiszámítani, hogy hány olyan objektum van, amely a tulajdonságok egyikével sem rendelkezik.

Jelölje $N(a_i, a_j, \ldots, a_n)$ azon objektumok számát, amelyek rendelkeznek az $a_i, a_j, \ldots, a_n$ tulajdonságokkal (és esetleg még továbbiakkal is). Ha egy tulajdonságra vesszőt teszünk, az jelentse azt, hogy az illető tulajdonsággal nem rendelkező objektumokat számoljuk. Ennek alapján célunk $N(a_1{}' \ldots a_k{}')$ meghatározása. A válasz pedig

$$N(a_1{}', \ldots, a_k{}') = N - N(a_1) - \ldots - N(a_k) + N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + \ldots + N(a_{k-1}, a_k) -$$
$$-N(a_1, a_2, a_3) - N(a_1, a_2, a_4) - \ldots - N(a_{k-2}, a_{k-1}, a_k) \pm \ldots + (-1)^k N(a_1, \ldots, a_k).$$

Itt az összegzésben éppen annyi tag van, mint ahány részhalmaza van a tulajdonságoknak, az előjel pedig attól függ, hogy páros vagy páratlan sok tulajdonság teljesülését követeljük meg.

Bizonyítsuk be ezt az összefüggést! A tulajdonságok számára, k-ra vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. A formula $k = 1$-re triviális. Az indukciós lépés alapján $k-1$ tulajdonságra:

$$N(a_1{}', \ldots, a_{k-1}{}') = N - N(a_1) - \ldots - N(a_{k-1}) +$$
$$+N(a_1, a_2) + \ldots + N(a_{k-2}, a_{k-1}) \pm \ldots + (-1)^{k-1} N(a_1, \ldots, a_{k-1}).$$

Alkalmazzuk ezt azokra az objektumokra, melyek rendelkeznek az a_k tulajdonsággal (számuk tehát $N(a_k)$):

$$N(a_1{}', \ldots a_{k-1}{}', a_k) = N(a_k) - N(a_1, a_k) - N(a_2, a_k) - \ldots - N(a_{k-1}, a_k) +$$
$$+N(a_1, a_2, a_k) + \ldots + N(a_{k-2}, a_{k-1}, a_k) \pm \ldots + (-1)^{k-1} N(a_1, \ldots, a_k).$$

Kivonva két utóbbi összefüggésünket a bal oldalon éppen $N(a_1{}', \ldots, a_k{}')$-t kapjuk, a jobb oldalon pedig pont a szita-formulában szereplő kifejezést.

Most pedig lássunk egy egyszerű módot arra, hogy hogyan memorizálhatjuk a szita-formulát!

$$N(a'b'\dots z') = N(1-a)(1-b)\dots(1-z),$$

ahol ezt a kifejezést úgy kell érteni, hogy végezzük el a jobb oldalon a beszorzásokat, majd ha pl. egy Nbc tagot látunk, akkor írjunk helyette $N(b,c)$-t.

A szita-formulára a következőképpen is gondolhatunk. Legyen H egy alaphalmaz, $A_1, \ldots, A_k$ ennek részhalmazai. Ekkor

$$|H \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)| = |H| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i<j, i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| \mp \ldots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|.$$

Természetesen ez azonos az előzővel, legyen egyszerűen A_i az a_i tulajdonsággal rendelkező objektumok halmaza. Megfordítva pedig legyen a_i az a tulajdonság, hogy egy elem az A_i halmazban van-e.

Adjunk ebben a megfogalmazásban egy **második** direkt **bizonyítást** a szita-formulára. Nézzük meg, hogy H egyes elemeit hányszor veszi tekintetbe a bal illetve a jobb oldal. Ha az $x \in H$ elem nincs benne $A_1 \cup \ldots \cup A_k$-ban, akkor a bal oldalon és a jobbon egyaránt 1-szer vesszük tekintetbe. Ha x az A_i-k közül éppen $A_{j_1}, \ldots A_{j_s}$-ben van benne ($k \geq s \geq 1$), a többiben nem, akkor a jobb oldalon ennyiszer számoltuk:

$$1 - s + \binom{s}{2} - \binom{s}{3} \pm \ldots + (-1)^s = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i \binom{s}{i},$$

ami a binomiális tétel miatt egyenlő $(1-1)^s = 0$-val, ahányszor számolnunk kell a bal oldalon.

Érdemes megjegyezni, hogy a szita-formula tulajdonképpen a „Dobjuk ki a rosszat!" ötlet általánosítása. Minden olyan esetben, amikor a „Dobjuk ki a rosszat!" ötletet alkalmazzuk, valójában a szita-formulát használjuk $k = 1$-re. Hogyan vehetjük észre, hogy nem a $k = 1$ esettel állunk szemben? Általában azt könnyű észrevenni, hogy vannak *többszörösen rossz* elemek (sorrendek, kiválasztások, stb.), azonban fontos hogy az A_i halmazok *nem* az i-szeresen rossz elemeket számolják. Azért vannak többszörösen rossz elemek, mert a rossz elemek *többféleképpen* lehetnek rosszak. Az A_i halmazok (vagy az a_i tulajdonságok) meghatározásához ezeket kell meghatároznunk.

Néhány **mintapélda:**

1. *Az osztálynak 36 tanulója van, ebből 20 fiú. Jó vagy jeles tanuló 25, közülük 14 fiú. 24-en sportolnak, közülük 16 fiú, és a sportolók között van 15 olyan tanuló, aki jó vagy jeles rendű. 10 olyan fiú van, aki sportol is és jó vagy jeles rendű. Bizonyítsuk be, hogy minden nem sportoló lány jó vagy jeles rendű.*

   A szita-formulában legyen a_1 a "fiúnak lenni", a_2 a "jó vagy jeles rendű lenni", a_3 pedig a "sportolni" tulajdonságot. A halmazos megfogalmazásban legyen a H alaphalmaz az osztály tanulóinak halmaza, A_1 a fiúk, A_2 a jó vagy jeles rendűek, A_3 pedig a sportolók halmaza. A szita-formula a nem sportoló, nem jó vagy jeles rendű lányok számára azt adja, hogy

   $$36 - 20 - 25 - 24 + 14 + 16 + 15 - 10 = 0,$$

   ami pontosan azt jelenti, mint amit be kellett látnunk.

2. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$n! = n^n - n \cdot (n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n \mp \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 1^n.$$

A bal oldal azt számolja, hogy hányféleképpen tudok n különböző tárgyat kiosztani n embernek úgy, hogy mindenki pontosan egyet kapjon. Fogalmazzuk meg, hogy ebből a szempontból milyen kiosztások rosszak: azok, amikor valaki nem kap semmit. Sorszámozzuk meg az embereket 1-től n-ig, és legyen a_i (a rossz tulajdonság) az, hogy az i-edik ember nem kap semmit. Ekkor az összes kiosztások száma $N = n^n$, $N(a_i) = (n-1)^n$, $N(a_i, a_j) = (n-2)^n$, és így tovább. (Az, hogy a több rossz tulajdonsággal rendelkező kiosztások száma csak a rossz tulajdonságok számától függ, bátorít minket abban, hogy a szita-formulát alkalmazzuk.) Így a szita-formula felhasználásával éppen a jobb oldalt kapjuk, mert az $s+1$-edik tag éppen az s rossz tulajdonsággal (és esetleg tovbbiakkal) rendelkező kiosztásokat számolja.

Így a szita-formulát az alábbi lépésekben alkalmazzuk (valamilyen extra tulajdonsággal rendelkező esetek/dolgok/elrendezések) számára:

1) Határozzuk meg az *összes* esetet (számuk N). Ehhez az extra tulajdonságot elhagyjuk.

2) Fogalmazzuk meg, hogy mik a rossz esetek. Ehhez az extra tulajdonságot tagadjuk.

3) Azonosítsuk, hogy hányféle rossz eset van, (a_i tulajdonságok illetve az A_i halmazok meghatározása). Ez azt jelenti, hogy a tagadáskor több tulajdonság van összekapcsolva a vagy művelettel.

4) Határozzuk meg az $N(a_i), N(a_i, a_j)$, illetve általában az $N(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_s})$ elemszámokat, vagy halmazokkal az $|A_i|$, $|A_i \cap A_j|$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_s}$ elemszámokat. (Érdemes az $s = 1, 2$ esetekkel kezdeni!)

5) Írjuk fel a szita-formulát.

Megjegyzések: Ha a 4) pontban a kapott elemszámok csak az s-től függenek, akkor a szitaformulát az

$$N({a_1}' \ldots {a_k}') = N - \binom{k}{1} N(a_1) + \binom{k}{2} N(a_1, a_2) - ...,$$

vagyis az

$$N({a_1}', \ldots, {a_k}') = N - \sum_{s=1}^{k} \binom{k}{s} N(a_1, \ldots, a_s)$$

alakban is írhatjuk.

Még egy olyan jel van, ami azt mutatja, hogy jól kezdtük el használni a szita-formulát (ez persze nem természeti törvény, hanem csak tapasztalati megfigyelés): ha az N-et, az $N(a_i)$-ket, valamint az $N(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_s})$-eket ugyanazzal az ötlettel tudjuk kiszámítani (pl. ugyanarra a kombinatorikai alapfeladatra vezet), akkor valószínűleg jól írtuk fel az A_i halmazokat (a_i tulajdonságokat).

3. *Hány fixpont-nélküli permutációja van n elemnek? Vagy kicsit szemléletesebben: hányféleképpen oszthatja ki egy ruhatáros n ember kabátját, ha senkinek nem adja a sajátját?*

1) A ruhatáros összesen $n!$-féleképpen oszthatja ki a kabátokat.

2) Meghatározzuk a rossz kiosztásokat. Ezek azok, amikor valaki a saját kabátját kapta vissza,

3) Tehát annyiféle rossz eset van, ahány ember, azaz $k = n$. Sorszámozzuk az embereket 1-től n-ig, és jelölje a_i azt az eseményt, hogy az i-edik ember a saját kabátját kapta vissza.

4) Ekkor $N(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_s}) = (n-s)!$.

5) Tehát a keresett szám:

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! \mp \dots (-1)^n \binom{n}{n} =$$

$$= n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \pm \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

4. *Az n természetes szám esetén jelölje $\phi(n)$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím számok számát. Keressünk képletet $\phi(n)$-re!*

Adjuk meg n prímtényezős felbontását: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots p_m^{\alpha_m}$.

1) Az összes eset: a számok 1-től n-ig,

2) Rossz eset: ha a szám nem relatív prím n-hez

3) Ez azt jelenti, hogy a szám osztható valamelyik p_i-vel. Jelölje tehát a_i azt a tulajdonságot, hogy egy szám osztható p_i-vel (természetesen az n-nél kisebb természetes számokra értve). Így $k = m$.

4) Ekkor

$$N(a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}) = \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}},$$

hiszen a $q = p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}$ jelöléssel, épp a $q, 2q, 3q, \dots, \frac{n}{q}\cdot q$ számokra igaz ez.

5) Tehát a keresett képlet:

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \dots - \frac{n}{p_k} + \frac{n}{p_1p_2} + \dots + \frac{n}{p_{k-1}p_k} \mp \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1p_2\dots p_k} =$$

$$= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})\dots(1 - \frac{1}{p_k}).$$