HALMAZRENDSZEREK

Ebben a témakörben az alábbi tíusú kérdésekkel foglalkozunk. Legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ egy alaphalmaznak, $\mathcal{F} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ ennek bizonyos részhalmazai. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy V az alaphalmaz, akkor V feletti halmnazrendszerről fogunk beszélni. V-re gondolhatunk úgy, mint egy város lakóira, a C_i halmazok pedig klubok. Az önkormányzat szabályokat hoz a klubok alakítására (például egyik klub sem lehet részhalmaza a másiknak; a klubok k eleműek és bármelyik kettőnek kell legyen közös eleme, stb.). A kérdés az, hogy a szabályoknak megfelelően legfeljebb hány klub hozható létre. Ha ezt a kérdést sikerül megválaszolnunk, akkor érdemes megnézni, hogy a kapott felső becslés éles-e, melyek azok az $\mathcal{F}$-ek, amelyek elemszáma maximális. Láthatjuk tehát, hogy a kérdésfelvetés a Turán tételhez hasonló, a különbség (a szabályokon kívül) abban van, hogy V bizonyos kételemű részhalmazai (élek) helyett V részhalmazait tekintjük. Ezen kapcsolat miatt a V feletti halmazrendszereket szokták hipergráfoknak is nevezni. Az egyik első eredmény ebben a kérdéskörben Sperner tétele.

Definíció. Az $\mathcal{F} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ halmazrendszer *Sperner-rendszer*, ha egyik C_i sem része másiknak. Formálisan: $C_i \not\subseteq C_j$, ha $i \neq j$.

Sperner tétele. *Ha $\mathcal{F} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ Sperner-rendszer egy n elemű halmaz felett, akkor $m \leq \binom{n}{[n/2]}$.*

Bizonyítás. (Erre az ötletre „permutációs módszer” néven hivatkozunk majd.) A bizonyítás eleje egy önmagában is érdekes egyenlőtlenség Sperner-rendszerekre, amelyet LYM-egyenlőtlenségnek szoktak nevezni (bár, mint Recski András szokta mondani, helyesebb lenne YBLM vagy a vicc kedvéért YBL M-egyenlőtlenségnek hívni, ezt később indokoljuk majd).

YBL M-egyenlőtlenség. *Legyen $\mathcal{F} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ Sperner-rendszer a V alaphalmazon (azaz $C_i \subseteq V$). Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|C_i|}} \leq 1.$$

Bizonyítás. Tekintsük a V alaphalmaz olyan sorrendjeit (permutációit), amelyben valamely C_i elemei a sorrend legelső $|C_i|$ elemét alkotják. Vegyük észre, hogy minden sorrendhez legfeljebb egy ilyen i tartozhat, hiszen ha kettő is lenne, akkor $\mathcal{F}$ tartalmazna két olyan halmazt, amelyek közül az egyik része a másiknak. Egy rögzített i-re olyan sorrend, amelyben C_i elemei vannak az első helyeken, $|C_i|!(n-|C_i|)!$ darab van. Ha ezeket összeadjuk minden i-re, akkor minden sorrendet legfeljebb egyszer kapunk meg, így

$$\sum_{i=1}^{m} |C_i|!(n-|C_i|)! \leq n!,$$

amiből az YBL M-egyenlőtlenség átrendezéssel adódik. □

Az YBL M-egyenlőtlenségből viszont azonnal következik a Sperner-tétel. Mivel a binomiális együtthatók közül a középső(k) a legnagyobb(ak), ez azt jelenti, hogy

$\binom{n}{|C_i|} \leq \binom{n}{[n/2]}$ teljesül minden i-re. Így

$$1 \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|C_i|}} \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} = m \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}},$$

vagyis $m \leq \binom{n}{[n/2]}$. $\square$

Kiegészítés a Sperner tételhez. *Ha egy n elemű V feletti $\mathcal{F}$ Sperner-rendszerre $m = \binom{n}{[n/2]}$, akkor az n páros esetben $\mathcal{F}$ az összes $n/2$ elemű részhalmazból áll. Ha n páratlan, akkor $\mathcal{F}$ vagy az összes $(n-1)/2$ elemű, vagy az összes $(n+1)/2$ elemű részhalmazból kell álljon.*

Kiegészítés az YBL M-egyenlőtlenséghez.** *Ha egy V feletti $\mathcal{F}$ Sperner-rendszerre egyenlőség teljesül az YBL M-egyenlőtlenségben, akkor valamely $0 \leq k \leq n$-re $\mathcal{F}$ a V összes k elemű részhalmazából kell álljon. Ez magában foglalja azt a két triviális esetet, amikor $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ illetve $\mathcal{F} = \{V\}$ ($k = 0$ illetve $k = n$).*

Az YBL M egyenlőtlenséget először komplikált módon Yamamoto bizonyította. A permutációs módszer Lubell-től származik, Meshalkin pedig általánosította az eredményt. A „B” betű Bollobás Bélára utal. Jegyezzünk meg, hogy az YBL M sorrend megegyezik az időrendi sorrenddel. Bollobás tétele előtt szükségünk van egy definícióra.

Definíció. Legyen V tetszőleges alaphalmaz. Az $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ és $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ halmazrendszereket *keresztben metsző*nek nevezzük, ha $A_i \cap B_i = \emptyset$, de $i \neq j$-re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

Bollobás tétele. *Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ és $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ keresztben metsző halmazrendszerek. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

Bizonyítás. A bizonyítás nem Bollobás eredeti bizonyítása, hanem (egymástól függetlenül) Katona Gyulától, Jaegertől és Payantól származik. ötlete nagyon hasonlít a permutáció módszerre. Tekintsük a V alaphalmaz azon permutációit (sorrendjeit), amelyben valamely i-re A_i minden eleme megelőzi B_i minden elemét. Egy adott sorrendhez legfeljebb egy jó i indexet lehet találni. Ha ugyanis i és j is jó lenne, akkor $A_i \cap B_j$ miatt az A_i elemei között lenne egy $b_j \in B_j$ elem, és ugyanígy a B_i elemei között lenne $a_j \in A_j$ elem. MivelA_i minden eleme megelőzi B_i minden elemét, így b_j megelőzi a_j-t, ami viszont azt jelenti, hogy a j index nem lehet jó az adott sorrendhez. Rögzített i-re a jó sorrendek száma

$$J_i = \binom{n}{|A_i| + |B_i|} \cdot (|A_i|)!(|B_i|)! \cdot (n - |A_i| - |B_i|)!,$$

ahol a binomiális együtthatóval kiválasztjuk azt az $|A_i| + |B_i|$ helyet ahova A_i és B_i elemei kerülnek, ezek közül az első $|A_i|$ helyre kell valamilyen sorrendben elhelyeznünk A_i, utána B_i elemeit (ez magyarázza a két faktoriálist), végül az $A_i \cup B_i$-be nem tartozó elemeket kell elhelyezzük a fennmaradó helyekre tetszőleges sorrendben.

Ha a J_i-ket $i = 1, \ldots, m$-re összeadjuk, akkor minden sorrendet legfeljebb egyszer veszünk tekintetbe, vagyis

$$\sum_{i=1}^{m} J_i \leq n!.$$

Egyszerűsítés és rendezés után a tételbeli egyenlőtlenséget kapjuk. □

Ha észrevesszük, hogy $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ akkor és csak akkor Sperner-rendszer, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B} = \{V \setminus A_1, \ldots, V \setminus A_m\}$ keresztben metsző halmazrendszerek, akkor láthatjuk, hogy Bollobás tételéből következik az YBL M egyenlőtlenség.

Abban az esetben, amikor $\mathcal{A}$ elemei r, $\mathcal{B}$ elemei s elemű részhalmazai V-nek, a Bollobás tételbeli egyenlőtlenség azt adja, hogy $m \leq \binom{r+s}{r}$, az alaphalmaz méretétől függetlenül.

A halmazrendszerekre vonatkozó extremális kérdések másik klasszikusa Erdős–Ko–Rado tétele.

Erdős–Ko–Rado tétel.* Legyen V tetszőleges n elemű alaphalmaz, $k \leq n/2$ rögzített természetes szám. Legyen $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ olyan V feletti halmazrendszer, amelyre

1) $C_i \neq C_j$ (ha $i \neq j$),
2) $|C_i| = k$ minden $i = 1, \ldots, m$-re,
3) és $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, minden $i \neq j$-re.

Ekkor

$$m \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Jegyezzük meg, hogy a becslés éles, ha rögzítünk egy $v \in V$ elemet és $\mathcal{C}$ a v-t tartalmazó k-elemű részhalmazokból áll, akkor $|\mathcal{C}| = \binom{n-1}{k-1}$.

Ha az elemszámra vonatkozó 2) feltételt elhagyjuk, akkor $m = 2^{n-1}$ halmaz is megadható a feltételeknek megfelelően (pl. vegyünk egy adott $v \in V$ elemet tartalmazó összes részhalmazt). Másrészt ennél több halmazt nem is tudunk megadni. Állítsuk párba a részhalmazokat, mindegyiket a komplementerével. Ilyen pár $2^n/2 = 2^{n-1}$ van, és mindegyik párból csak az egyik részhalmaz lehet eleme $\mathcal{C}$-nek.

A további részben a Sperner tételhez fűzünk néhány megjegyzést.

A Sperner tétel visszavezetése párosításokra **.

Mielőtt az első bizonyításra rátérünk, idézzünk fel egy múlt félévi trükkös skatulyaelves feladatot: az $1, \ldots 2n$ számok közül legfeljebb hányat választhatunk ki olymódon, hogy ne legyen közöttük kettő úgy, hogy a kisebbik osztja a nagyobbikat. A skatulyák legyenek a páratlan számok, és a $2k-1$-hez tartozó skatulyába kerüljenek a $(2k-1) \cdot 2^s$ alakú számok. Egy skatulyába nyilván nem kerülhet két szám, így legfeljebb n számot adhatunk meg. Másrészt az $n+1, \ldots, 2n$ számok között nincs kettő, hogy a kisebbik osztaná a nagyobbat.

Ezt az ötletet alkalmazzuk a bizonyításban, az összes részhalmazokat páronként diszjunkt *láncokra* bontjuk. Az $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_s$ halmazokat nevezzük láncnak. A bizonyításban ez a lánc olyan lesz, hogy $A_{i+1} \setminus A_i$ mindig egyetlen elemet tartalmaz.

Bizonyítás párosításokkal. Készítsünk gráfot V részhalmazaiból a következőképpen: a csúcsok szinteken helyezkednek el, $n+1$ szint van, sorszámuk 0-tól n-ig megy. Az i-edik szinten $\binom{n}{i}$ csúcs van, melyek V i-elemű részhalmazainak felelnek meg. Élek csak az i-edik és az $i+1$-edik szint csúcsai között mennek, az A és a B között akkor megy él, ha $|A| = i$, $|B| = i+1$ és $A \subset B$. Ebben a gráfban olyan diszjunkt utakat keresünk majd, amelyek láncok (lásd a biz.-t megelőző megjegyzést). Ezeket az utakat nem egyenként építjük, hanem egyszerre minden utat továbbépítünk az i-edik és az $(i+1)$-edik szint között. Az i-edik és az $(i+1)$-edik szint között olyan párosítást keresünk, amely az i-edik szint *minden* csúcsát fedi (ezt $i < n/2$-re tesszük meg). E két szint között egy páros gráfot látunk, amelyben minden az i-edik szinten („alsó”) levő csúcs foka $(n-i)$ (hiszen egy i-elemű részhalmazhoz ennyiféleképpen vehetünk hozzá egy elemet), minden az $(i+1)$-edik szinten („felső”) levő csúcs foka $i+1$ (hiszen egy $i+1$ elemű részhalmazból ennyiféleképpen hagyhatunk el egy elemet). Egy ilyen gráfban létezik a kevesebb csúcsú osztályt fedő párosítás (ld. az első ZH egyik feladatát!). Ehhez ellenőriznünk kell a Hall-feltétel teljesülését. Legyen X az alsó szint csúcsainak egy részhalmaza, Y pedig azon felső csúcsok halmaza, amelyek X valamely pontjával össze vannak kötve. Tekintsük csak az $X \cup Y$ által feszített H részgráfot. Ekkor az X és Y között menő (H-beli) élek száma pontosan $|X| \cdot (n-i)$ (alulról felfelé számolva). Másrészt Y minden pontjának foka H-ban legfeljebb $i+1$, így az élek száma H-ban legfeljebb $|Y| \cdot (i+1)$. Ebből az $|X|(n-i) \leq |Y|(i+1)$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből valóban $|Y| \geq |X|$ jön, tekintettel arra, hogy $i < n/2$ miatt $n-i \geq i+1$. Így egészen a középső szintig (vagy szintekig) építhetjük az utakat. Ezután feje tetejére állítva a gráfot fordítva csinálhatjuk ugyanezt. Az eljárással a gráfot diszjunkt utakra bontottuk, ahol minden út tartalmaz a középső szint(ek)ről legalább egy pontot (az utak legtöbbje a középső szint egy pontjából áll, ha n páros; egyetlen élt tartalmaz a két középső szint között, ha n páratlan). Így az utak száma megegyezik a középső szint(ek) csúcsszámával, vagyis $\binom{n}{[n/2]}$-vel. Mivel $\mathcal{F}$ minden útból (ami a halmazos megfogalmazásban lánc) legfeljebb egy pontot tartalmazhat, így valóban $m \leq \binom{n}{[n/2]}$. $\square$

A bizonyítás kulcsa az volt, hogy az i-edik és az $(i+1)$-edik szint között van az i-edik szintet fedő párosítás (ha $i < n/2$). Ezt „fiktív pontok” bevezetésével is láthatjuk: vegyünk az i-edik szinthez $\binom{n}{i+1} - \binom{n}{i}$ fiktív pontot és kössük össze ezeket a $(i+1)$-edik szint csúcsaival úgy, hogy $(n-i)$-reguláris páros gráfot kapjunk. Ebben van teljes párosítás, amelynek a fiktív pontokat nem használó része az eredeti gráfban egy az i-edik szintet fedő párosítás.

A két bizonyításból összerakható, hogy mikor érhető el az egyenlőség. A permutációs bizonyításból következik, hogy minden C_i-nek $[n/2]$ eleműnek kell lennie. A párosításos bizonyításból viszont kiolvasható, hogy ha n páratlan, akkor nem lehet „vegyesen” venni az $(n-1)/2$ és az $(n+1)/2$ elemű részhalmazokat. (Ez nem magától értetődő, de meggondolható.) Tehát az n páratlan esetben pontosan két esetben fordulhat elő egyenlőség, ha az összes $(n-1)/2$ elemű, vagy ha az összes $(n+1)/2$ elemű részhalmaz alkotja $\mathcal{F}$-et. Ez volt a fenti kiegészítés a Sperner tételhez.