Lineáris rekurziós feladatok

1. Adjuk meg a Fibonacci-számok explicit képletét!

2. Oldd meg az alábbi rekurziókat!
a) $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $n > 2$-re $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$
b) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $n > 2$-re $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$
c) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $n > 2$-re pedig $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$;

3. Jelölje a_n azt, hogy
a) hány n betűs szó készíthető az a, b és c betűkből, ha nincs két b egymás mellett;
b) az $1, 2, \ldots, n$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amiben nincs két szomszédos szám;
c) hányféleképpen költhet el egy turista n eurót, ha minden nap egyet vásárol az alábbiak közül: fagyi (1 euró), képeslap (1 euró), buszjegy (2 euró);
d) hány n betűs szó készíthető az a, b és c betűkből, ha nincs két benne bc (cb lehet).
Mennyi a_1, a_2? Írj fel rekurziót a_n-re! Mennyi a_0?

4. Hányféleképpen mehetünk fel egy n lépcsőből álló lépcsőn, ha minden lépésben egyet vagy kettőt lépünk? (És ha egyet, kettőt vagy hármat?)

5. Adjunk meg olyan rekurziót, melynek megoldása $a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^n$!

6. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$-es táblát 2×1-es dominókkal?

7. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, amely nem tartalmaz két szomszédos elemet? (Hány k-elemű ilyen részhalmaz van?)

8. Oldjuk meg a következő rekurziót: $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $n \geq 3$-ra pedig $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$;

9. Jelölje a_n azt, hogy hányféleképpen költhet el egy gyerek n eurót, ha minden nap egy vagy két gombóc fagyit vesz a hatféléből, gombóconként 2 euróért. Írj fel rekurziót a_n-re, és határozd meg a_1, a_2 értékét!