Ramsey tétele(i) gráfokra

Ramsey tétele két színre. *Minden $k, \ell \geq 2$-re van olyan n, hogy egy legalább n csúcsú egyszerű gráf éleit két színnel színezve vagy lesz k olyan csúcs, amelyek közti minden él piros, vagy lesz ℓ olyan csúcs, amelyek közti minden él kék. Azaz $n \to (k, \ell)$. Ha $n_1 \to (k-1, \ell)$ és $n_2 \to (k, \ell - 1)$, akkor $n_1 + n_2 \to (k, \ell)$.*

Bizonyítás. Elég az állítás második részét bizonyítani, mert abból n létezése már következik. Triviális, hogy $\ell \to (2, \ell)$, és $k \to (k, 2)$, bármely k, ℓ-re. A második részt használva ezekből tetszőleges k, ℓ-hez eljuthatunk. (Formálisan ez egy teljes indukció $k + \ell$, $k, \ell \geq 2$ szerint.)

Tegyük fel tehát, hogy $n_1 \to (k-1, \ell)$ és $n_2 \to (k, \ell - 1)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $n_1 + n_2 \to (k, \ell)$. Indirekte tegyük fel, hogy az $n_1 + n_2$ csúcsú gráfban nincs se teljes piros k-as, se teljes kék ℓ-es.

Vegyünk ki egy P csúcsot. Tekintsük azokat a csúcsokat, amelyek P-vel piros éllel vannak összekötve. Ezek között a pontok között nem lehet $k-1$ olyan, amelyek páronként piros éllel vannak összekötve, mert akkor P-vel együtt teljes piros k-ast kapnánk a gráfban. Persze ez a rész sem tartalmazhat üres ℓ-est. Így ez a rész legfeljebb $n_1 - 1$ pontot tartalmazhat. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy a P-vel kék éllel összekötött pontok száma legfeljebb $n_2 - 1$. Így P-n kívül legfeljebb $n_1 + n_2 - 2$ pont lehetne, márpedig a csúcsok száma $n_1 + n_2$ volt. Ez ellentmondás, azaz valóban $n_1 + n_2 \to (k, \ell)$.

$\blacksquare$

Más megfogalmazás. *Minden $k, \ell \geq 2$-re van olyan n, hogy egy legalább n csúcsú egyszerű G gráfban vagy van k olyan pont, amelyek közül bármely kettő össze van kötve, vagy van ℓ olyan pont, amelyek közül semelyik kettő nincs összekötve, azaz $n \to (k, \ell)$.*

Valóban, a G éleit pirosra, komplementerének éleit kékre festve ez éppen az előző tétel első része. A tételbeli rekurzióból a triviális $\ell \to (2, \ell)$ és $k \to (k, 2)$ összefüggéseket használva $6 \to (3,3)$ jön (hisz $n_1 = 3 \to (3,2)$ és $n_2 = 3 \to (2,3)$). Ezt felhasználva $6 \to (3,3)$ és $4 \to (4,2)$ miatt $10 \to (4,3)$, és így folytathatnánk tovább. A gyakorlaton ezt javítottuk $9 \to (4,3)$-ra.

Felírva az előző tételből közvetlenül kapott értékeket n-re, észrevehetjük, hogy ezek a Pascal-háromszög elemei. Ez magyarázza a következő állítást.

Állítás. Minden $k, \ell \geq 2$-re

$$\binom{k+\ell-2}{k-1} \to (k, \ell).$$

Bizonyítás. Abban az esetben, ha $k = 2$ vagy $\ell = 2$, a binomiális együttható k illetve ℓ, az állítás pedig triviálisan igaz, mint azt a korábbi tétel bizonyításának elején megjegyeztük. Ezután $k + \ell$ szerinti indukciót alkalmazva, az indukciós feltétel miatt feltehetjük, hogy

$$\binom{k+\ell-3}{k-1} \to (k, \ell-1), \quad \text{és} \quad \binom{k+\ell-3}{k-2} \to (k-1, \ell).$$

Az előző tétel szerint akkor

$$\binom{k+\ell-3}{k-1}+\binom{k+\ell-3}{k-2}\to(k,\ell),$$

de itt a nyíl előtt állø kifejezés a Pascal-háromszög képzési szabálya miatt éppen

$$\binom{k+\ell-2}{k-1},$$

amit bizonyítani akartunk. ∎

Megjegyzés. Abban az esetben, ha $k=\ell$, a $\binom{2k-1}{k-1}$ nagyon durván 2^{2k} nagyságrendű. Természetes a kérdés, hogy a legkisebb olyan n, amelyre $n\to(k,k)$ legalább mekkora kell legyen. Erről Erdős Pál megmutatta, hogy $n\geq 2^{k/2}$. Ez magyarul azt jelenti, hogy $n<2k/2$ esetén van az n csúcsú teljes gráf éleinek olyan színezése, amelynél nincs k olyan pont, hogy a közöttük levő élek mind egyszínűek lennének. Erdős bizonyítása nem konstruktív, ilyen színezés létezését mutatta meg, a színezés nincs explicit módon megadva.

Ramsey tétele sok színre háromszögekre. Tegyük fel, hogy $n\to(3,...,3)$ és itt $t-1$ db 3-as szerepel. Ekkor $t(n-1)+2\to(3,...,3,3)$, ahol a nyíl jobboldalán t db 3-as szerepel.

Bizonyítás. A $N=t(n-1)+2$ pontú gráfban egy tetszőlegesen választott p csúcshoz $t(n-1)+1$ él illeszkedik, amelyek t színnel vannak színezve. Lesz tehát a skatulyaelv miatt olyan szín, amelyre több, mint $n-1$ (azaz legalább n) p-ből kiinduló él lett színezve. Ezen élek végpontjai között, ha ugyanez a szín akár egyszer is előfordul, akkor ebből a színből már lesz háromszög. Ha nem, akkor ezen legalább n pont közti élek csak $t-1$ színnel vannak színezve, de akkor a feltétel (t.i. $n\to(3,...,3)$ és itt $t-1$ db 3-as van) szerint lesz egyszínű háromszög.

∎

Ennek alapján itt is megadható konkrét becslés a Ramsey-számra, de ennek bizonyítása kicsit nehezebb az előzőnél.

Állítás. $1+\lfloor et!\rfloor\to(3,\ldots,3)$, ahol a jobboldalon t darab 3-as áll.
t szerinti indukcióval ($t=2$ volt gyakorlaton, sőt $t=3$-at is láttuk). Vegyünk ki egy p csúcsot. Ezen p csúcshoz $\lfloor et!\rfloor$ él illeszkedik, melyek t színosztályba vannak sorolva. Mivel

$$\lfloor et!\rfloor=\lfloor\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t!}{j!}\rfloor=\sum_{j=0}^{t}\frac{t!}{j!}=1+t\sum_{j=0}^{t-1}\frac{(t-1)!}{j!}=1+t\lfloor e(t-1)!\rfloor,$$

ezen t szín egyike, mondjuk a piros legalább $\lfloor e(t-1)!\rfloor+1$ p-hez illeszkedő élt tartalmaz. Ha ezen csúcsok között van piros él, akkor azonnal találtunk piros k-ast. Ha nincs piros él, akkor ez a rész csak $t-1$ színnel lett megszínezve, amikor viszont az indukciós feltevés miatt találunk benne egyszínű háromszöget. ∎

Jegyezzük meg, hogy a $t = 2, 3$ esetekben az előző becslés visszaadja a 6 illetve a 17 értékeket, amelyek gyakorlaton szerepeltek.

Megjegyzés. Gyakorlaton volt, hogy $18 \to (4,4)$. Megmutatjuk, hogy $17 \not\to (4,4)$. Ehhez meg kell adnunk egy 17 csúcsú gráfot, amelyben nincs se teljes 4 pontú részgráf, se 4 olyan pont, amelyek között nincs él. Legyenek a csúcsok a modulo 17 maradékosztályok (azaz $0, ..., 16$). Az i és j csúcsot kösse össze él, ha $i - j$ kvadratikus maradék modulo 17. Fizikailag ki lehet számolni, hogy nincs négy olyan maradékosztály, hogy bármely kettő különbsége kvadratikus maradék (vagy nem-maradék) legyen. Ezt megkönnyíti, ha észrevesszük, hogy egy ilyen négyest el het tolni, és be lehet szorozni egy kvadratikus maradékkal. Tehát feltehető, hogy 0,1 a maradékosztályaink között van. Innen viszont tényleg számolnunk kell.

Megjegyzés. Az előzőhöz hasonlóan az is igaz, hogy $16 \not\to (3,3,3)$. Ehhez megint egy színezést kell megadnunk. Legyen P az 5 hosszú kör, csúcsait $V(P)$-vel, éleit $E(P)$-vel jelöljük. Képzeljük a 16 csúcsú gráf csúcshalmazát úgy, mint $V(P)$ páros elemszámú részhalmazainak halmazát. Ha A, B két ilyen részhalmaz, akkor legyen az $\{A, B\}$ él *piros*, ha $A \triangle B$ a P gráf éle, *kék*, ha $A \triangle B$ a P komplementerének éle, végül az $\{A, B\}$ él legyen *zöld*, ha $|A \triangle B| = 4$. Itt $A \triangle B$ az A és B halmazok szimmetrikus differenciáját jelöli. Erről a színezésről megmutatható, hogy egyik színben sincs benne háromszög. Ehhez a szimmetrikus differencia asszociativitását kell felhasználni.

Feladat. Igaz-e $8 \to (4,3)$?

A következő állítás a Ramsey tétel egy tipikus alkalmazását mutatja be.

Tétel. (Schur) Ha az első n természetes számot k osztályba osztjuk, ahol $n \geq ek!$, akkor az egyik osztály tartalmaz három olyan x, y, z számot, amelyekre $x + y = z$.

Bizonyítás. Legyen $\{A_1, \ldots, A_k\}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ szóban forgó partíciója. Tekintsük azt a teljes gráfot, amelynek csúcsai az $\{1, 2 \ldots, n+1\}$ elemei, és színezzük az i és j csúcsokat összekötő élt a ν színnel, ha $|i-j| \in A_i$. Az előző tétel miatt találunk három olyan pontot, $i < j < k$-t úgy, hogy a közöttük menő élek azonos színűek. Ez viszont azt jelenti, hogy az $x = j - i$, $y = k - j$ és $z = k - i$ elemek ugyanazon A_ν-ben vannak és persze $z = x + y$. ∎

Feladat. Színezzük ki k színnel egy n elemű halmaz nemüres részhalmazait. Biz. be, hogy ha n elég nagy ($n \geq ek!$), akkor van két diszjunkt nemüres részhalmaz, X és Y, amelyekre X, Y és $X \cup Y$ színe azonos.