Párosítások páros gráfban

Idézzük fel a páros gráfok fogalmát: ezek olyan gráfok, amelyek csúcsai két diszjunkt osztályra oszthatók úgy, hogy élek csak különbözőosztályba tartozó pontokat kötnek össze. A $G = (A, B; E)$ jelölésben A és B a két osztályt jelöli, tehát $V(G) = A \cup B$, E pedig az élek halmaza. Gyakran engedünk meg többszörös éleket, de hurokél persze nem lehet páros gráfban. Több természetes kérdés megfogalmazható páros gráfokkal, a párosítások vizsgálatát pl. az alábbival motiválhatjuk: legyenek lányok és fiúk a táncteremben (ez a két osztály), egy lányt és egy fiút kössünk össze éllel, ha szívesen táncolnak egymással (ezt tehát kölcsönösnek képzeljük). Mi annak a feltétele, hogy lehet olyan táncpárokat alakítani, hogy minden lány és fiú egyszerre táncoljon? A gráfok nyelvén ez azt jelenti, hogy olyan éleket keresünk, amelyeknek nincs közös csúcsuk és minden csúcs valamelyiküknek végpontja.

Definíció. A G gráf éleinek olyan halmazát, amelyeknek nincs közös pontjuk, *független élhalmaznak* vagy (részleges) *párosításnak* nevezzük. Ha egy csúcs végpontja a párosítás valamelyik élének, akkor azt mondjuk, hogy a csúcsot a párosítás *fedi*. *Teljes párosítás* az olyan párosítás, amely G minden csúcsát fedi. (A definícióhoz nem kell, hogy a gráf páros legyen, ebben az esetben a független élhalmazról megköveteljük, hogy ne tartalmazzon hurokélt.)

Frobenius tétele szükséges és elégséges feltételt ad teljes párosítás létezésére páros gráfban, vagyis válaszol a fenti tánctermi kérdésre. A tétel kimondásához szükségünk van egy jelölésre. Ha X a G gráf csúcsainak egy halmaza, akkor $G(X)$ jelöli mindazon csúcsokat, amelyek X valamelyik (esetleg több) csúcsával össze vannak kötve. Röviden $G(X)$-et X szomszédai halmazának nevezhetnénk.

Frobenius tétele. A $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ **és** minden $X \subseteq A$-ra $|G(X)| \geq |X|$.

Szavakban tehát azt követeljük meg, hogy egyrészt a két osztály mérete egyforma legyen, másrészt akárhogy is választjuk ki A egy X részhalmazát (a táncteremben mondjuk néhány lányt), ennek a részhalmaznak legalább annyi szomszédja legyen (B-ben), mint ahány eleme volt a részhalmaznak. (A tánctermi problémánál ez szavakban azt jelenti, hogy bármelyik k lány legalább k fiúval táncoljon szívesen). Az világos, hogy mindkét feltétel szükséges, hiszen ha $|G(X)| < |X|$ volna, akkor nem lehetne X csúcsait fedő párosítás, hiszen X-ből csak $G(X)$-be mehetnek élek, az $|A| = |B|$ feltétel pedig nyilvánvaló, hisz minden párban egy fiú és egy lány táncol. A két feltétel *együtt* elégséges is. Ennek bizonyítása részletesen megtalálható LPV 10.3-ban.

Következmény. (Kőnig) (1) r-reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.
(2) r-reguláris páros gráf élkromatikus száma r.

Bizonyítás. (1)-hez gondoljuk meg, hogy a $G = (A, B; E)$ páros gráfban az élek száma $|E| = |A| \cdot r = |B| \cdot r$. Így valóban $|A| = |B|$. Ugyanezt az ötletet használjuk a $G(X)$-re vonatkozó feltétel ellenőrzésekor. Tekintsük azt a G' páros gráfot, amelynek két osztálya X és $G(X)$ élei pedig G ezen két osztály között menő élei (ez tehát G-nek az $X \cup G(X)$ által feszített részgráfja.) Ebben a részgráfban X minden csúcsának foka r, $G(X)$ minden csúcsának foka legfeljebb r (hiszen $G(X)$ egy csúcsából mehet nem X-beli csúcsba is él.)

Így a G' éleinek száma $|X| \cdot r$, ami legfeljebb $|G(X)| \cdot r$. Ebből valóban $|X| \leq |G(X)|$, vagyis a Frobenius tételbeli mindkét feltétel teljesül, azaz van teljes párosítás G-ben.

Hogyan változik a helyzet, ha nem ugyanannyi fiú van, mint lány, de megelégszünk azzal, hogy minden lány táncoljon? Ez a gráfok nyelvén azt jelenti, hogy nem feltétlen teljes párosítást keresünk, hanem olyant, amely A minden pontját fedi.

Hall tétele. A $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$-ra $|G(X)| \geq |X|$.

A tételben szereplő feltételt Hall-feltételnek fogjuk hívni és megmondjuk azt is, hogy melyik osztály részhalmazaira kívánjuk meg tejesülését. A Hall-feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha kiválasztjuk A-nak k db csúcsát tetszőlegesen, akkor ehhez a k csúcshoz legalább k db olyan B-beli csúcs legyen, amely az A-beli kiválasztott csúcsok valamelyikével össze van kötve. Ennek **minden** k-ra teljesülnie kell (nyilván $k = 1, \ldots, |A|$ közül). Feladatokban is gyakran ezt a szétbontást, az $|X|$ szerinti ellenőrzést használjuk.

Tanulságos lehet lemásolni az LPV 10.3-beli bizonyítást erre az esetre is, mi viszont azt vázoljuk, hogy a Hall tétel hogyan vezethető vissza Frobenius tételére.

Bizonyítás. A Hall-feltétel szükségessége ugyanúgy látszik, mint a Frobenius tételnél, így elég az elégségességet belátni. $X = A$-ra alkalmazva a Hall-feltételt, azt kapjuk, hogy $|A| \leq |G(A)| \leq |B|$ (hiszen $G(A) \subseteq B$). Vegyünk hozzá A-hoz $|B| - |A|$ db **fiktív** csúcsot és ezek mindegyikét kössük össze B minden pontjával. Így egy $G^* = (A^*, B; E^*)$ páros gráfot kapunk. Frobenius tételével megmutatjuk, hogy G^*-ban van teljes párosítás, és ekkor persze az A-beli pontokat fedő élek az eredeti G-ben A-t fedő párosítást adnak. (Tehát B azon pontjainak nem lesz párja, akiknek fiktív csúcs volt a párja A^*-ban.) Világos, hogy $|A^*| = |B|$. Legyen $X \subseteq A^*$. Ha X tartalmaz fiktív pontot, akkor $G^*(X) = B$, így $|G^*(X)| = |B| = |A^*| \geq |X|$. Ha X nem tartalmaz fiktív pontot, azaz $X \subseteq A$, akkor $G^*(X) = G(X)$, így ebben az esetben is teljesül a Hall-feltétel. Tehát a Hall-feltétel igaz G^*-ra és $|A^*| = |B|$, alkalmazható tehát a Frobenius tétel, így G^*-ban van teljes párosítás. Ezek közül a nem fiktív csúcsokba menő élek (melyek az eredeti G élei) a G egy A-t fedő párosítását adják.

Térjünk vissza egy pillanatra a Frobenius tételhez. Ha $|A| = |B|$ és A-ra teljesül a Hall-feltétel, akkor B-re is, hiszen ha A-ra teljesül a Hall-feltétel, akkor van teljes párosítás, abból viszont B-re is teljesülnie kell a szükséges feltételnek, vagyis a Hall-feltétel B-re is teljesül. Ezt közvetlenül is láthatjuk: indirekte tegyük fel, valamely $Y \subset B$-re $|G(Y)| < |Y|$. Legyen $X = A \setminus G(Y) \subseteq A$. Mik lehetnek X szomszédai. X egy x csúcsából nem mehet él Y semelyik csúcsához sem, mert akkor x-nek $G(Y)$-ban kellene lennie. Ez azt jelenti, hogy $G(X) \subseteq B \setminus Y$. Node $|Y| > |G(Y)|$ és $|A| = |B|$ miatt $|G(X)| \leq |B| - |Y| < |B| - |G(Y)| = |X|$.

Mi a helyzet akkor, ha (a tánctermi problémánál) nem ragaszkodunk ahhoz, hogy minden lány táncoljon, hanem megelégszünk azzal, hogy legfeljebb d lány áruljon petrezselymet, azaz legfeljebb d olyan csúcs legyen A-ban, amelyet a párosítás nem fed. Erre ad választ a deficites Hall-tétel.

Deficites Hall tétel. A $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t legfeljebb d csúcs híján fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$-ra $|G(X)| \geq |X| - d$.

Bizonyítás. A feltétel szükségessége megint nyilvánvaló, az elégségességet kell csak igazoljuk. A bizonyítás megint fiktív pontok bevezetésével történhet. Vegyünk hozzá B-hez d db fiktív csúcsot (ezek halmaza legyen D) és ezeket kössük össze A minden csúcsával. Így egy $G^* = (A, B^* = B \cup D; E^*)$ páros gráfot kapunk. Megmutatjuk, hogy G^*-ban az A osztályra teljesül a Hall-feltétel. Legyen $X \subseteq A$. Ekkor $G^*(X) = G(X) \cup D$, így $|G^*(X)| = |G(X)| + |D| \geq |X| - d + d$, a tételbeli feltétel miatt. A G^*-beli A-t fedő párosításból legfeljebb d db megy fiktív csúcsba, így a párosítás G-beli élei legfeljebb d csúcs híján fedik A-t.

A deficites Hall-tétel segítségével azt is megmondhatjuk, hogy mekkora egy páros gráfban a legnagyobb párosítás. Ehhez azt a **legkisebb** d-t kell meghatározzuk, amelyre a $|G(X)| \geq |X| - d$ feltétel minden $X \subseteq A$-ra teljesül. Ehhez meg kell keressük $|X| - |G(X)|$ **maximumát** az összes $X \subseteq A$-ra. Mivel az $X = \emptyset$ esetén az $|X| - |G(X)| = 0$, így a maximum nem-negatív. Ha ezt a maximumot d_0 jelöli, akkor van olyan $X_0 \subseteq A$, amelyre $|X_0| - |G(X_0)| = d_0$, tehát $d < d_0$-ra az $X = X_0$ halmaz megsértené a $|G(X)| \geq |X| - d$ feltételt. Másrészt viszont $d = d_0$-ra teljesül a $|G(X)| \geq |X| - d_0$ feltétel minden $X \subseteq A$-ra.

Következmény. Páros gráfban a független élek maximális száma $= |A| - \max\{|X| - |G(X)| : X \subseteq A\}$.

Ezen észrevétel után már könnyű belátni Kőnig tételét. (Ehhez a Gráfparaméterekről szóló részben érdemes elolvasni a ν és a τ gráfparaméterek definícióját.)

Tétel (Kőnig). Páros gráfban $\nu = \tau$, azaz a független élek maximális száma egyenlő a lefogó pontok minimális számával.

Bizonyítás. Legyen a páros gráf $G = (A, B; E)$. A fenti következmény szerint $\nu = |A| - d_0$, ahol d_0 jelöli $\max\{|X| - |G(X)| : X \subseteq A\}$-t, mint korábban. Tekintsük azon $X_0 \subseteq A$-t, amelyre $|X_0| - |G(X_0)| = d_0$. Ekkor $L = A \setminus X_0 \cup G(X_0)$ lefogó ponthalmaz, hiszen $G(X_0)$ pontjai minden X_0 valamely pontjából induló él másik végpontját tartalmazzák. Mivel $|L| = |A| - |X_0| + |G(X_0)| = |A| - d_0$, így találtunk ν pontú lefogó ponthalmazt. Mivel a gráfban van ν független él, ezért ennél kevesebb ponttal nem is lehet lefogni az éleket (ez ugyanaz, mint a Gráfparaméterek részben a $\tau \geq \nu$ bizonyítása).