VÉGES MATEMATIKA MINTAZH

1. Egy legalább négy csúcsú gráfban minden csúcs foka páratlan (és ezért páros sok csúcsa van). Mutassuk meg, hogy van három azonos fokú pont!

2. Megadható-e a (szokásos háromdimenziós euklideszi) térben 25 pont úgy, hogy mindegyiktől pontosan három másik legyen legfeljebb 1 távolságra?

3. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a fokszámok:
a) 7,6,5,5,4,4,3,1,
b) 7,6,5,5,5,3,1,1?

4. Egy egyszerű gráf csúcsai az $\{(x, y) : x = 1, \ldots, 100, y = 0, 1, 2\}$ pontok. Az (x, y) és (x', y') pontokat él köti össze, ha vagy $x = x'$ (és persze $y \neq y'$), vagy $y = y'$, és $|x-x'| = 1$.
a) Megrajzolható-e ez a gráf a ceruza felemelése nélkül egy vonallal, ha minden élt csak egyszer húzhatunk meg?
b) Van-e a gráfnak Hamilton-útja illetve Hamilton-köre?
c) Hány élt kell elhagynunk a gráfból, hogy fát kapjunk?
d) Mennyi a gráf kromatikus száma?

5. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a fokszámok $6, 5, 5, 4, 3, 1, 1, 1$? Van-e olyan nem egyszerű gráf, amelyben ezek a fokszámok, nincs hurokél és csak egyetlen párhuzamos élpár van?

6. Igazoljuk, hogy ha egy összefüggő G gráfnak egy nem üres G' részgráfja nem tartalmazza G minden pontját, akkor van G-nek olyan éle, amelynek egyik végpontja G'-beli, a másik nem.

7. Legyen G egyszerű, összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy létezik olyan séta, amely G minden élét pontosan kétszer tartalmazza.

8. Egy 32 fős osztályban 7 egyforma tollat oszt szét a tanító néni. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha
a) minden gyerek legfeljebb egyet kap;
b) kaphat többet is?
Mi a helyzet, ha különböző jutalomkönyveket (7 db-ot) oszt szét?

9. Egy 2m oldalú kocka alakú szobában repdes 9 légy. Mutassuk meg, hogy minden pillanatban van közöttük kettő, amelyek egymástól mért távolsága legfeljebb 1,7m.

10. n házaspár hányféleképpen tud úgy táncolni egymással, hogy senki sem táncol a saját párjával?

11. Egy fában kétféle fokszám fordul elő, az egyik 92-szer, a másik9-szer. Mik a fa csúcsainak fokszámai?
12. Mi lehet X értéke, ha a $023X0278$ fában 4 levél van? Rajzoljuk fel az X legkisebb értékéhez tartozó fát!
13. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a max. fok 4, a kromatikus szám pedig 3. Ugyanez a kérdés az élkromatikus számmal is. Mi a helyzet, ha a kromatikus szám 4 illetve 5?

A ZH-n 6 feladat lesz, valamint 2 elméleti kérdés (de azok több részből állnak majd).