Állandó együtthatós lineáris rekurziók

Sok esetben (pl. Fibonacci-számok) egy sorozat tagjai az alábbi alakú rekurziónak tesznek eleget:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n,$$

ahol k rögzített, a $c_1, \ldots, c_k$ együtthatók pedig valós számok. Természetesen egy ilyen rekurzió akkor határozza meg a sorozat tagjait, ha az első k tagot is megadjuk. Egy ilyen rekurziót nevezünk *állandó együtthatós lineáris rekurzió*nak. Az elnevezésben az állandó együtthatós jelző arra utal, hogy a $c_1, \ldots, c_k$ együtthatók rögzítettek (azaz nem függnek n-től), míg a lineáris jelző arra, hogy az a_{n+k}-t megadó jobboldali kifejezés az $a_{n+k-1}, \ldots, a_n$ lineáris kifejezése.

A továbbiakban a $k = 2$ esetet vizsgáljuk részletesebben, azaz az

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n, \tag{0}$$

alakú rekurziókat.

Keressük először a rekurzió megoldását mértani sorozat alakjában, azaz legyen $a_n = a_1 q^{n-1}$. Behelyettesítve ezt a kifejezést a fenti rekurzióba, a következőket kapjuk:

$$a_1 q^{n+1} = c_1 a_1 q^n + c_2 a_1 q^{n-1}, \tag{1}$$

amiből $a_1 q^{n-1}$-nel való leosztással másodfokú egyenletet nyerünk q-ra:

$$q^2 - c_1 q - c_2 = 0. \tag{2}$$

Jelöljük ennek az egyenletnek a gyökeit q_1, q_2-vel. Vegyük észre, hogy átalakításunk éppen azt mutatja, hogy a_1-et tetszőlegesen választva, az $a_n = a_1 {q_1}^{n-1}$ és az $a_n = a_1 {q_2}^{n-1}$mértani sorozat is eleget tesz a kiindulási rekurziónak. Mivel a rekurziónk lineáris, így nemcsak ezek a mértani sorozatok, hanem az

$$a_n = \lambda_1 {q_1}^{n-1} + \lambda_2 {q_2}^{n-1}$$

alakú sorozatok is kielégítik a rekurziót, ha λ_1 és λ_2 tetszőleges rögzített szám. (Jegyezzük meg, hogy előadáson a_n-et $\lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$ alakban kerestük, de a kitevőbeli 1 különbség csak a λ konstansok értékét változtatja.)

Abban az esetben, ha a (2) egyenletnek két különböző gyöke van, ez már elegendő is a (0) rekurzió megoldásához. Ugyanis a λ_1 és λ_2 együtthatókat megválaszthatjuk olymódon, hogy a sorozat első két tagja az előre adott a_1 és a_2 szám legyen. Ehhez meg kell találnunk az alábbi lineáris egyenletrendszer λ_1, λ_2 megoldásait:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ a_2 &= \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek mindig van megoldása, méghozzá egyértelmű, a középiskolából ismert módszerekkel meg is kapjuk.

Előfordulhat azonban, hogy a (2) egyenletnek (melyet szoktak a (0) lineáris rekurzió *karakterisztikus egyenleté*nek is nevezni) komplex gyökei vannak. Ez tehát azt jelenti, hogy esetleg a fenti egyenletrendszert a komplex számok halmazán kell megoldanunk, ami nehezíti a számolást. Mivel a (2) egyenlet valós együtthatós, így ezek a komplex gyökök egymás konjugáltjai. Ha valaki el akarja kerülni a komplex számokkal való számolást, akkor a következőt teheti: legyen $q_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a q_1 trigonometrikus alakja. Ekkor $q_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, amiből $(q_1+q_2)/2 = r\cos\varphi$ és $(q_1-q_2)/(2i) = r\sin\varphi$. Ennek alapján a fenti egyenletrendszert kicserélhetjük az

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_1 + \mu_2 \\ a_2 &= \mu_1 r\cos\varphi + \mu_2 r\sin\varphi. \end{aligned}$$

egyenletrendszerre, mivel az új kifejezések q_1-nek és q_2-nek lineáris kombinációi, így a csere nem más, mint új ismeretlenek bevezetése az egyenletrendszerben.

Tehát megoldottuk a (0) rekurziót, ha karakterisztikus egyenletének nincsen többszörös gyöke. Most vizsgáljuk meg azt az esetet, ha $q_1 = q_2$ kétszeres gyök. Ekkor viszont nemcsak q^{n-1}, hanem nq^{n-1} is eleget tesz a (0) rekurziónak. Ha ugyanis a_1nq^{n-1}-t behelyettesítjük (1)-be, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_1(n+2)q^{n+1} = c_1a_1(n+1)q^n + c_2a_1nq^{n-1}.$$

Végigosztva a_1q^{n-1}-nel, majd kivonva a (2) karakterisztikus egyenlet n-szeresét, a

$$2q^2 = c_1q$$

egyenlethez jutunk, ami nem más, mint (2) deriváltja. Algebrából tudjuk, hogy egy többszörös gyök a polinom deriváltjának is gyöke, amivel beláttuk, hogy nq^{n-1} is eleget tesz a (0) rekurziónak.

Lássunk most két példát!

1. Oldjuk meg az $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ lineáris rekurziót!

   A karakterisztikus egyenlet $q^2 - 4q + 4 = 0$, melynek $q = 2$ kétszeres gyöke. Így a_n-et $\lambda_1 2^{n-1} + \lambda_2 n2^{n-1}$ alakban keressük, egyenletrendszerünk pedig két egyenletből áll:

   $$(a_1 =)2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (a_2 =)6 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2.$$

   Ennek azonnal láthatóan $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a megoldása, amit visszaírva a_n kifejezésébe kapjuk, hogy $a_n = (n+1)2^{n-1}$.

2. Oldjuk meg az $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ lineáris rekurziót!

   A karakterisztikus egyenlet $q^2 - 2q + 2 = 0$, aminek $1+i$ és $1-i$ a megoldásai. Trigonometrikus alakban $1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$, azaz a megoldást $\lambda_1\sqrt{2}^{n-1}\sin(n-1)\pi/4 + \lambda_2\sqrt{2}^{n-1}\cos(n-1)\pi/4$ alakban keressük. Eszerint egyenletrendszerünk

   $$(a_1 =)1 = \lambda_2, \quad (a_2 =)2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Ebből megint $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ adódik, vagyis $a_n = \sqrt{2}^{n-1}\sin(n-1)\pi/4 + \sqrt{2}^{n-1}\cos(n-1)\pi/4$. Mivel a sin és cos függvények 2π szerint periodikusak a szereplő értékeket fel tudjuk írni, ha n-et modulo 8 tekintjük. (Ezt gyakorlásul érdemes is megtenni.)

Vegyük észre, hogy tetszőleges k esetén is teljesen analóg módon járhatunk el. Ekkor persze karakterisztikus egyenletünk k-adfokú:

$$q^k - c_1 q^{k-1} - \ldots - c_k = 0, \tag{2'}$$

és ha ennek gyökei $q_1, q_2, \ldots, q_k$, akkor az

$$a_n = \lambda_1 {q_1}^{n-1} + \ldots + \lambda_k {q_k}^{n-1}$$

alakú sorozatok elégítik ki a rekurziót, ahol a λ-k tetszőleges rögzített számok.

Abban az esetben, ha a (2') egyenletnek k különböző gyöke van, $q_1, \ldots, q_k$, az

$$a_j = \lambda_1 {q_1}^{j-1} + \ldots + \lambda_k {q_k}^{j-1}, \quad (j = 1, \ldots, k)$$

lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, hogy a kívánt λ-kat megkapjuk. Egyenletrendszerünkben tehát k egyenlet van, az ismeretlenek pedig a λ_j-k, amikből szintén k db van. Lineáris algebrából tudjuk (vagy ha nem akkor elhisszük), hogy ennek az egyenletrendszernek mindig van megoldása (méghozzá egyértelmű). A szóbanforgó egyenletrendszer determinánsa ugyanis Vandermonde-féle, így nem lehet nulla. Persze ez csak annyit jelent, hogy biztosak lehetünk benne, hogy a középiskolából ismert módszerekkel megoldva az egyenletrendszert, megoldáshoz jutunk.

Most is előfordulhat, hogy a (2') egyenletnek komplex gyökei is vannak. Mivel a (2') egyenlet valós együtthatós, így ezek a komplex gyökök konjugált gyökpárokban fordulnak elő. A komplex számokkal való számolást teljesen hasonló módon lehet elkerülni, mint a $k = 2$ esetben: ha q_1 és q_2 egymás konjugáltjai, akkor egyenletrendszerünkben kicserélhetjük a $\lambda_1 {q_1}^{j-1} + \lambda_2 {q_2}^{j-1}$ tagokat $\mu_1 r^{j-1}\cos(j-1)\varphi + \mu_2 r^{j-1}\sin(j-1)\varphi$ tagokra.

A $k = 2$ esetben leírtakhoz hasonlóan, ha $q_1 = q$ r-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor $q^{n-1}, nq^{n-1}, \ldots, n^{r-1}q^{n-1}$ is eleget tesz kiindulási rekurziónknak. Ez azt jelenti, hogy egy r-szeres gyök esetén az itt felírt tagok kerülnek egyenletrendszerünkbe. Megint az a helyzet, hogy a kezdeti feltételeket felírva, a kapott egyenletrendszer biztosan (egyértelműen) megoldható lesz.

Lássunk erre is egy példát!

3. Oldjuk meg az $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ rekurziót!

   A karakterisztikus egyenlet $q^3 - 2q^2 - q + 2 = 0$, aminek $q = 1$, $q = -1$ és $q = 2$ a megoldásai. Egyenletrendszerünk:

   $$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad 3 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \quad 7 = \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3,$$

   amelynek $\lambda_3 = 2$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_1 = -1$ a megoldása, azaz $a_n = -1 + 2^n$.

Ugyancsak fontos, hogy felismerjük, hogy mikor vezet egy szöveges feladat állandó együtthatós lineáris rekurzióra. Erre általános recept nincs, néhány ötletet láthatunk most.

Hányféleképpen mehetünk fel az n lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre 1 vagy 2 fokot léphetünk? És ha 3-at is?

Az ötlet tipikus: diszjunkt részfeladatokra bontunk az első lépés szerint. Az első esetben az $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$, a másodikban a $b_n = b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}$ rekurziót kapjuk. Az első esetben két, a másodikban három kezdeti tagot kell meghatározzunk: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, a másodikban $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = a_3 + 1 = 4$ lenne. Ezek az értékek is alátámasztják azt a megérzésünket, hogy $a_0 = b_0 = 1$.

Hányféleképpen költhetünk el n eurót, ha 1 euróért 3-féle, 2 euróért 4-féle különböző cikket vásárolhatunk? (Lényeges, hogy milyen sorrendben vásároltuk a cikkeket, de az nem számít, hogy hány cikket vettünk)

Megint az első költés szerint bontunk szét, a különbség az, hogy most az első költés többféle lehet. Így az $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ rekurziót kapjuk. A jobb oldal első tagjában 3-féleképpen költhetjük el egy cikkre az első eurót, ettől függetlenül költhetjük el a maradék $n-1$ eurót. Hasonlóan, ha elsőre 2 eurós cikket vásárolunk, azt 4-féleképp tehetjük meg, majd ettől függetlenül elkölthetjük a megmaradt $(n-2)$ eurónkat. (Vigyázat, az a_{n-2} együtthatója nem az, hogy 2 eurót hányféleképpen költhetünk el, hanem az, hogy 2 eurót egyetlen cikkre hányféleképpen költhetünk el). Az $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \cdot 3 + 4$, összhangban az $a_0 = 1$ érzésünkkel. Ez segíthet az ellenőrzésben, a_2-t (illetve ha a_3-ra is szükségünk van, akkor azt) ugyanazzal a részfeladatokra bontással számolhatjuk ki, mint amivel a rekurziót kapjuk.

Hasonló jellegű problémák felvethetők sorozatokra is.

Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs két b betű egymás mellett?

Itt is az első, illetve az első két betű szerint bontunk részfeladatokra. Ha az első betű **nem b**, akkor ezt tetszőleges $n-1$ hosszú hasonló sorozat követheti. Ha az első betű b, akkor utána a vagy c kell jöjjön, azt pedig egy $n-2$ hosszú hasonló sorozat követi. Így $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Itt az első 2 az a, c választás, a második 2 a ba, bc választási lehetőség miatt van.

Nehezebb feladathoz jutunk, ha a bc egymást követő párt zárjuk ki.

Hány olyan n hosszú a, b, c betűkből felépülő sorozat van, amelyben nincs egymás mellett bc ilyen sorrendben?

Most fordítva okoskodunk: írjunk egy $n-1$ hosszú, a feltételnek megfelelő szó **elé** egy betűt. Így $3a_{n-1}$ lehetőséget kapunk, csak sajnos ezek között vannak rosszak is, mégpedig azok, amelyek bc-vel kezdődnek. Ha ezt elhagyjuk, akkor $n-2$ hosszú jó sorozatot kapunk. Így az $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ rekurziót kapjuk. Nyilván $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, mert csak a bc sorozat rossz.

Logikailag kevésbé trükkös az alábbi okoskodás. Csak akkor nem világos a helyzet, ha a sorozat b-vel kezdődik. Ekkor aszerint csoportosítunk, hogy hány b-vel kezdődik a sorozat. Néhány b után c-t nem írhatunk, csak a-t (ha ez volt az utolsó b), így azt kapjuk, hogy

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_1 + 1.$$

Itt a jobb oldalon szereplő tagok rendre a $0, 1 \ldots, n-1$ b-vel kezdődő jó sorozatok száma, az utolsó 1 pedig a csupa b sorozatnak felel meg. Felírva ugyanezt a rekurziót a_{n-1}-re az

$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + \ldots + a_1 + 1$$

összefüggést kapjuk. A két egyenletet kivonva az

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

kifejezést kapjuk, ami átrendezés után éppen a fenti rekurzió. Ez a második ötlet akkor működik, ha az a_n felírásában szereplő tagok indexei számtani sorozatot alkotnak, mert akkor a kivonás után majdnem minden tag kiesik.

Feladat. Hányféleképpen fedhető le a $2 \times n$-es sakktábla 2×1-es dominókkal? És a $3 \times n$-es 3×1-esekkel? És a $2 \times n$-es három mezőt elfoglaló L betőkkel? És ha vegyesen használjuk az L betűket és a 2×1-eseket? És ha vegyesen használjuk az L betűket és a 3×1-eseket illetve a 4×1-eseket?

(Mindegyik esetben elég csak a rekurziót felírni.)