Leszámlálási feladatok
Beadási határidő: május 31., 12:00

1., Mutassuk meg, hogy az F_n Fibonacci-számokra teljesül, hogy

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad (n \geq 0).$$

2., Legyen

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad (n \geq 1)$$

az n-edik harmonikus szám. Határozzuk meg a $\sum H_n x^n$ generátorfüggvényt!

3., Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutációiban mennyi a ciklusok számának átlaga?

4., Legyen R_n az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz azon partícióinak száma, amelyben minden osztály páros sok elemet tartalmaz. Keressünk rekurziót R_n-re, majd mutassuk meg, hogy a $\sum R_n x^n/n!$ exponenciális generátorfüggvény $\exp(\cosh x - 1)$.

5., A Snake Oil (generátorfüggvény) módszerrel számoljuk ki az

$$f_n = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}, \quad (n \geq 0)$$

összeget.

6., Jelölje $g(n)$ az n számozott csúcsú 2-reguláris egyszerű gráfok számát. Határozzuk meg a $g(n)$-ek exponenciális generátorfüggvényét!

7., a) Határozzuk meg a kocka saját magába való elforgatásainak, mint az éleken való permutációknak a ciklusmutató polinomját!

b) Hányféleképpen színezhetjük az éleket k színnel, ha az elforgatással egymásba vihetőeket nem tekintjük különbözőnek.

8., Tekintsük egy $\mathrm{GF}(q)$ feletti n dimenziós vektortér altereinek a tartalmazásra nézett poset-jét. Számítsuk ki ennek a Möbius-fv.-ét!

9., Legyen μ egy L háló Möbius-fv.-e. Legyen 0 a háló legkisebb, 1 a legnagyobb eleme, $a < 1$. Biz. be, hogy

$$\sum_{x : x \wedge a = 0} \mu(x, 1) = 0.$$

10., Bizonyítsuk be, hogy $\left[{p \atop d} \right] \equiv \left\{ {p \atop d} \right\} \equiv 0 \pmod{p}$, ha $1 < d < p$, ahol p prímszám.

11., Mennyi a

$$\sum_{k=r}^{s} \binom{a}{k} \binom{-a}{n-k}$$

határozatlan összeg értéke?

12., Legyen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2n}{2k}}.$$

Keressünk rekurziót S_n-re a Gosper-Zeilberger módszerrel!

13. Alkalmazzuk a Wilf-Zeilberger párok módszerét a

$$\sum_k \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{\binom{k+a}{k}} = \frac{a}{n+a}, \quad (n \geq 0)$$

azonosság igazolására!

14., Mutassuk meg, hogy az $R(n,k) = -(10n^2 - 6kn + 17n + k^2 - 5k + 7)/(2(2n-k+2)^2)$ tanúsítja (a WZ párok módszere szerint) a

$$\sum_k (-1)^{n-k} \binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

azonosságot!

Az utolsó feladatokhoz szimbolikus számításokat végző program használata szükséges (legalábbis ajánlott, ha véges idő alatt meg akarják csinálni)!

Így összesen 14 feladatból a jegyek várhatóan úgy lesznek, hogy 3-4: 2, 4.5-6.5: 3, 7-9: 4, 9.5- : 5.