ZARANKIEWICZ PROBLÉMÁJA

Szőnyi Tamás

2009. november 13, Budapest

ELTE, Budapest

Zarankiewicz problémája

Ártalmatlannak tűnő kérdés:

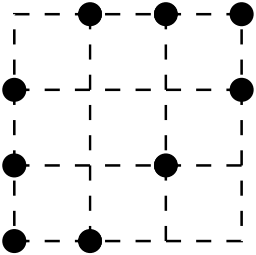
Zarankiewicz problémája. Tekintsük az $n \times m$-es négyzetrácsot, azaz az

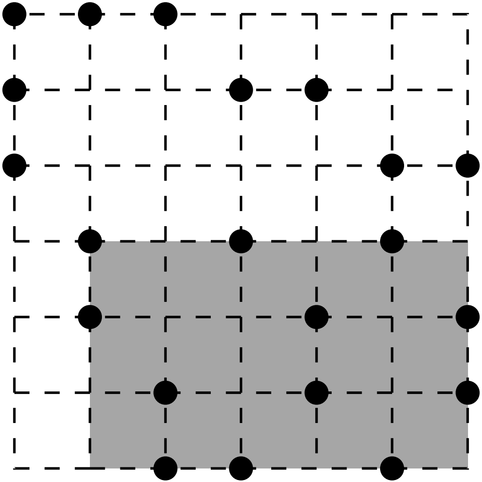
$$\{(i,j):\ i=1,\dots m,\ j=1,\dots,n\}$$

alakú rácspontokat. Válasszunk ki ezek közül minél többet úgy, hogy a kiválasztott pontok között ne legyen négy olyan pont, amelyek a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap csúcsai!

Hány pontot választhatunk ki ilyen módon?

Feladat Egyik véglet: n vagy m kicsi. Oldjuk meg Zarankiewicz problémáját az $n = 2$, 3, és 4 esetén!





Zarankiewicz problémája halmazokkal. Válasszuk ki az $\{1, \dots n\}$ halmaz néhány részhalmazát, $A_1, \dots, A_m$-et az alábbi $(*)$ feltételnek megfelelően.

$(*)$ Bármely két különböző részhalmaz metszete legfeljebb egyelemű, azaz $|A_i \cap A_j| \leq 1$, ha $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$.

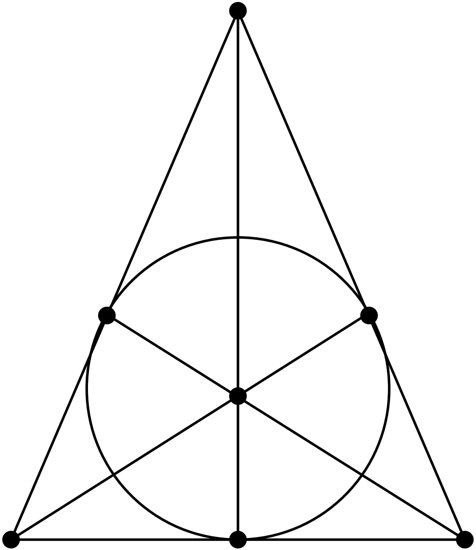
Mekkora lehet $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|$ maximuma?

Zarankiewicz problémája (páros) gráfokkal. Hány éle lehet egy $n + n$ csúcsú páros gráfnak, ha nem tartalmaz 4 hosszú kört?

Zarankiewicz feladatának másik véglete: $m = n$.

Zarankiewicz problémája mátrixszal Egy $m \times n$-es mátrix minden eleme 0 vagy 1. Legfeljebb hány egyes lehet mátrixunkban, ha két sor és két oszlop négy keresztezési mezejében soha nem állhat mindenütt egyes.

Tétel. (Reiman) *$n \times n$-es 0-1 mátrixban legfeljebb $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$ egyes lehet, ha nincs két-két olyan sor és oszlop, amelyek keresztezési mezőiben mind a négy helyen egyes áll.*



EGYENLŐSÉG esetén: VÉGES PROJEKTÍV SÍK

Feladat. Keressünk a 7×7-es és 13×13-es négyzetrácsban 21 illetve 52 rácspontot, hogy ne legyen a tengelyekkel párhuzamos téglalap!

IRODALOM

Bérczi Gergely, Gács András, Szőnyi Tamás: Véges projektív síkok, az *Új Matematikai Mozaik* (Hraskó A. szerk.), TypoTeX Kiadó könyvben, 2002, 53–76; különösen a 2. fejezet

Mi megoldatlan?

A Reiman féle képletből $n = m = q^2 + q + 1$-re lehet egyenlőség.
Mi van, ha pl. $n = q^2 + q + 1$, $m = q^2 + q$?
Kevés esetben ismert a pontos válasz!
Konkrét n, m-re számítógéppel vizsgálható

Mi lesz a diák feladata?

1. Ismert eredmények összegyűjtése
(Füredi, Guy, Kővári-T. Sós-Turán, Reiman, Roman, Znám)
2. Megoldatlan speciális esetek vizsgálata.