Többszörös összefüggőség

Egy gráfot *összefüggőnek* neveztünk, ha bármely két csúcsa között vezet út (vagy séta). Szemléletesen azt szeretnénk megfogni, hogy mikor sokszorosan összefüggő egy gráf. Ha a gráfot egy város úthálózataként fogjuk fel, akkor vizsgálhatjuk azt, hogy hány csomópont (vagy hány úszakasz, azaz gráf nyelven él) felújítása azaz lezárása (gráf nyelven kitörlése) esetén marad összefüggő a gráf. Egy másik lehetőség annak megfogalmazása lenne, hogy két tetszőleges pont között hány lényegesen különböző út van. Célunk ezen két lehetőség precíz megfogalmazása, valamint kapcsolatuk tisztázása lesz.

Definíció. A G gráfot *k-szorosan (csúcs)összefüggőnek* nevezzük, ha legalább $k+1$ csúcsa van, és **akárhogy** hagyunk el belőle k-nál kevesebb csúcsot, a megmaradó gráf összefüggő marad. Röviden azt mondjuk, hogy G k-öf. Azt a legnagyobb k-t, amelyre a gráf k-öf., a gráf (csúcs)összefüggőségi számának hívjuk, és $\kappa(G)$-vel (kiolvasása: kapp) jelöljük.

Definíció. A G gráfot *k-szorosan élösszefüggőnek* nevezzük, ha **akárhogy** hagyunk el belőle k-nál kevesebb élt, a megmaradó gráf összefüggő marad. Röviden azt mondjuk, hogy G k-élöf. Azt a legnagyobb k-t, amelyre a gráf k-élöf., a gráf élösszefüggőségi számának hívjuk, és $\kappa'(G)$-vel jelöljük.

$k = 1$-re mindkét fogalom a korábbi összefüggőséget jelenti. A K_r teljes gráf $(r-1)$-öf. és $(r-1)$-élöf. (Megjegyezzük, hogy lényegében itt használjuk a csúcsösszefüggőségnél a csúcsok számára tett feltételt.) A $\kappa(G)$ illetve $\kappa'(G)$ paramétereket úgy is definiálhatnánk, hogy legkevesebb ennyi csúcs ill. él törlésével szüntethetjük meg a gráf összefüggőségét. Ebben az esetben is az egyetlen kivétel a teljes gráfok esete a csúcsösszefüggőség esetén.

Könnyen látható, hogy ha egy gráfban van d-edfokú csúcs, akkor a gráf legfeljebb d-élöf., hiszen, ha ezen csúcsból kiinduló valamennyi élt töröljük, akkor a csúcs izolált csúcs lesz a maradék gráfban. Más szóval, ha $\delta(G)$-vel jelöljük a G gráfban előforduló minimális fokszámot, akkor $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Itt általában nincs egyenlőség: gondoljunk két K_r teljes gráfra, amelyeket egy-egy csúcsuknál egy további él köt össze. Erre a G-re $\kappa'(G) = 1$, hiszen a gráf összefüggő, de nem kétszeresen élöf., mert az összekötő élt törölve két komponensre esik szét. (Érdemes meggondolni, hogy erre a gráfra $\kappa(G)$ is 1.)

A $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ egyenlőtlenséget gyakorlaton közvetlenül is láttuk, de következik majd a kétféle összefüggőség-fogalom kapcsolatáról szóló tételből is.

A kétféle összefüggőség-fogalom kapcsolatának vizsgálatához alapvető lesz Menger alábbi tétele. Azt mondjuk, hogy egy csúcs illetve él *lefog* egy utat, ha a csúcsa illetve éle az útnak. A tételt nem bizonyítjuk.

Menger tétele. *Legyen s és t két csúcs a G gráfban. Az s-ből t-be menő éldiszjunkt utak maximális száma megegyezik az s ből t be vezető összes utat lefogó élek minimális számával.*

Ha s és t nincs éllel összekötve, akkor az s-ből t-be vezető közös belső csúcs nélküli utak maximális száma megegyezik az s ből t be vezető összes utat (s és t felhasználása nélkül) lefogó csúcsok minimális számával. $\square$

Egy ilyen erős minimax tétel mindig meglepő. Az nyilvánvaló, hogy a tételbeli minimum legalább annyi, mint a maximum, hiszen az éldiszjunkt (illetve közös belső csúcs nélküli) utak mindegyikét egy-egy külön él illetve csúcs kell lefogja. Hasonló volt a helyzet a $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség esetén is, ott pl. mégsem kaptunk egyenlőséget (csak páros gráfokra). A Menger tétel erejét mutatja, hogy belőle a páros gráfokra vonatkozó $\nu = \tau$ König tétel azonnal következik. Ha $G = (A, B; E)$ a páros gráf és a és b két olyan új csúcs, hogy a-t A, b-t B minden csúcsával éllel összekötjük, akkor az a és b közötti független utaknak pontosan egy éle lesz G-beli, így az ilyen utak maximális száma ν. A lefogásukhoz meg csak G pontjait használhatjuk, így ezek száma τ.

Menger tétele segítségével megmutathatjuk, hogy a többszörös összefüggőség kétféle megközelítése ugyanaz. Ehhez először az alábbi lemmát látjuk be.

Lemma. *Ha a $G = (V, E)$ gráf k-szorosan összefüggő ($k \geq 2$), akkor a belőle az e él törlésével kapott $G - e$ gráf $(k-1)$-szeresen összefüggő.*

Bizonyítás. Az (indirekt) bizonyítást lényegében elég a $k = 2$ esetre elmondani, abból az általános eset azonnal adódik. Tegyük fel, hogy G összefüggő, $G - e$ nem összefüggő, legyen K egy komponense (pontosabban annak csúcshalmaza), $V \setminus K$ a maradék. Mivel G összefüggő, ezért $V \setminus K$ is az, mert K és $V \setminus K$ között G-ben csak az e él mehetett. Mivel G kétszeresen összefüggő, ezért $|V| \geq 3$, tehát a K és $V \setminus K$ komponensek valamelyike legalább 2 pontú. Törölve e azon végpontját, amely a legalább két pontú komponensben van, olyan gráfot kapunk, amely nem lehet összefüggő. Tehát G nem lehetett kétszeresen összefüggő. $\square$

Tétel. *A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha legalább $k+1$ csúcsa van és bármely két csúcsa között létezik k db közös belső csúcs nélküli út. Hasonlóan G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik k db éldiszjunkt út.*

Bizonyítás. Először az élösszefüggőségre vonatkozó állítást bizonyítjuk. Ha G k-szorosan élöf. és $u \neq v$ két csúcs, akkor az $u \to v$ utakat nem lehet k-nál kevesebb éllel lefogni, tehát a Menger tétel szerint van legalább k db éldiszjunkt $u \to v$ út. Megfordítva, ha bármely két csúcs között legalább k éldiszjunkt út van és törlünk $l < k$ db élt, akkor a maradék gráf biztosan összefüggő marad, hiszen bármely két csúcsa között az eredetileg meglevő k db útból csak l-et szüntethet meg az l db él törlése.

A csúcsösszefüggőségre a bizonyítás szinte szó szerint ugyanez, azzal a különbséggel, hogy külön kell válasszuk azt az esetet, amikor az $u \neq v$ csúcsokat él köti össze, és azt, mikor nem. Az első esetben törölni kell az $e = \{u, v\}$ élt (ami magában egy $u \to v$ út), és a megmaradó gráfra alkalmazni a Menger tételes érvelést. A megmaradó gráf a Lemma szerint $(k-1)$-szeresen öf., azaz találunk $(k-1)$ db közös belső csúcs nélküli $u \to v$ utat, ami az e éllel kiegészítve adja a k db kívánt utat. $\square$

Mivel a csúcsdiszjunkt utak egyben éldiszjunktak is, ebből a tételből következik a $\kappa \leq \kappa'$ egyenlőtlenség. Ezt a tételt is nevezhetjük Menger tételnek. Az alábbi egyszerű következményt is Menger látta be.

Tétel. *A G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két pontján át megy kör. Az is igaz, hogy itt „bármely két pontján" helyett „bármely két élén" is mondható (ami látszólag erősebb).*

Bizonyítás. Az első állítás az előző állítás más megfogalmazása, mert két közös belső csúcs nélküli $u \to v$ út együtt egy kört ad. Az élekre vonatkozó állítás meg azért igaz, mert kétszeresen öf. gráf egy élét egyetlen csúccsal továbbosztva kétszeresen öf. gráfot kapunk, így a szóbanforgó e, f élekre egy-egy E, F csúcsot elhelyezve az E-n és F-en átmenő kör az eredeti gráfban egy az e és f éleket tartalmazó kör volt. $\square$

Ez az állítás csak részben vihető át k-szorosan öf. gráfokra.

Dirac tétele. *Ha $k \geq 2$ és a G gráf k-szorosan öf., akkor bármely k csúcson van kör.* $\square$

Ezt nem bizonyítjuk. A megfordítás nem igaz, gondoljunk a C_n n csúcsú körre, ahol $n \geq k$ (és $n > 3$), hiszen a körök összefüggőségi száma 2.