HAMILTON-UTAK, HAMILTON-KÖRÖK

A G gráf egy körét (útját) Hamilton-körnek (Hamilton-útnak) nevezzük, ha a gráf minden csúcsán átmegy. Az Euler-vonal ill. körvonal létezéséhez képest fontos különbség, hogy nem ismerünk szükséges és elégséges feltételt a létezésére.

A Hamilton-kör létezésének egy szükséges feltétele az alábbi.

Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére. *Ha egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb k komponense van.*

Bizonyítás. Képzeljük el, hogy a Hamilton-kör éleit pirosra színeztük, a többi él pedig fekete. Ha egy pontot kitörlünk, akkor a Hamilton-körből egy annál eggyel rövidebb út keletkezik, amely a maradék gráfban Hamilton-út, így a maradék összefüggő. Mi történik, ha további pontokat törlünk ki? Egy további pont kitörlése a piros utat két részre bontja (vagy ha az út valamelyik végpontját töröljük, akkor egy eggyel rövidebb út marad). Természetesen lehet, hogy ha a nem piros éleket is figyelembe vesszük, akkor a két piros komponens között van fekete él, azaz a gráf mégsem bomlik két komponensre. Minden további pont törlése egy piros élekből álló utat bont az előbbiek szerint két részre (vagy rövidít egy éllel). Így a második ponttal kezdve minden egyes újabb pont törlésével legfeljebb eggyel nőhet a komponensek száma, még akkor is, ha csak a piros éleket tekintjük. ∎

Hasonló szükséges feltétel mondható Hamilton-utakra is. Ez az előző bizonyításból azonnal látható, hiszen az első pont törlése után kapott gráfnak biztos van Hamilton-útja.

Szükséges feltétel Hamilton-út létezésére. *Ha egy Hamilton-utat tartalmazó gráfból k csúcsot kitörlünk (a belőle kiinduló élekkel együtt), akkor a maradék gráfnak legfeljebb $k+1$ komponense van.* ∎

Egy elégséges feltételt ad meg a következő tétel.

Dirac tétele. *Ha egy $n(>2)$ csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban van Hamilton-kör (azaz olyan kör, amely minden ponton átmegy).*

Bizonyítás. Indirekte tegyük fel, hogy a gráfban nincs Hamilton-kör és húzzunk be éleket mindaddig, amíg nem is keletkezik. Nézzük azt a gráfot, amelybe már nem tudunk további éleket behúzni anélkül, hogy Hamilton-kör ne keletkezzék. Persze az élek behúzásával csak növeltük a fokszámokat, így erre a gráfra is teljesül a feltétel. Legyen pl. x_1 és x_n két összekötetlen pont. Ha az ezek közti élt behúznánk, keletkezne Hamilton-kör, ami azt jelenti, hogy az eredeti gráfban volt x_1-ből x_n-be vezető Hamilton-út, azaz az eredeti gráf csúcsai felsorolhatók egy olyan $x_1, \ldots, x_n$ sorozatban, hogy $\{x_i, x_{i+1}\}$ él minden

$i = 1, \ldots, n-1$-re. Tekintsük x_1 szomszédait és x_n szomszédait. Ha valamilyen i-re ($i \geq 2$) az lenne a helyzet, hogy x_i szomszédja x_1-nek és x_{i-1} szomszédja x_n-nek, akkor gráfunkban $x_1, ..., x_{i-1}, x_n, x_{n-1}, ..., x_i, x_1$ Hamilton-kör lenne. (Itt a körnek csak a csúcsait tüntettük fel, az élek a szomszédos csúcsok alkotta párok; ez egyszerű gráf esetén elég.) Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha x_1 és x_n foka legalább $n/2$, akkor ilyen pontpár kell legyen. Nézzük x_1 szomszédait. Ilyen legalább $n/2$ van, köztük x_2. Jelöljük meg az ezeket közvetlenül megelőző pontokat pirossal. Így legalább $n/2$ piros pontot kaptunk (köztük x_1-et). Olyan pont, ami nincs pirossal megjelölve, legfeljebb $n-n/2 = n/2$ lesz. Jegyezzük meg, hogy x_n biztosan nincs pirossal megjelölve. Mivel x_n-nek saját magán kívül legalább $n/2$ szomszédja van, összesen pedig n csúcsunk van, lesz olyan piros pont, amely x_n-nek szomszédja. Akkor viszont a fentebbi okoskodással tudunk Hamilton-kört csinálni, ellentmondás. (Fogalmazhatnánk úgy is, hogy az élek behúzásával garantálhatjuk, hogy egy ilyen gráf tartalmaz Hamilton-utat, majd a piros pontos okoskodással azt Hamilton-körré módosítjuk.) ∎

Ugyanez az okoskodás adja Dirac tételének Ore-től származó alábbi élesítését is.

Ore tétele.* *Ha egy n csúcsú egyszerű gráfban minden összekötetlen x, y csúcspárra teljesül $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.* ∎

További elégséges feltételek is ismertek Hamilton-kör létezésére, illusztrációként egyet említünk, de nem bizonyítunk.

Pósa Lajos tétele.* Jelöljük a G gráf fokszámait nagyság szerint növekedő sorrendben $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$-nel. Ha minden $k < n/2$-re $d_k \geq k+1$, akkor G-ben van Hamilton-kör.