Véges matematika gráfos gyakorló feladatok

1. Rajzoljuk le az összes legfeljebb 4 pontú egyszerű gráfot! (Az egyformákat, azaz izomorfakat csak egyszer.)

2. Megadható-e egy 111-elemű halmaznak 27 részhalmaza úgy, hogy bármelyik részhalmaz pontosan 7 másikat metsz?

Megoldás. Rendeljünk hozzá gráfot! A csúcsok legyenek a részhalmazok (tehát 27 csúcs van). Két csúcsot él kössön össze, ha a megfelelő részhalmazok metszik egymást. Így minden csúcs foka 7 lesz. ILyen gráf nincs, mert $27 \cdot 7$ páratlan.

3. Megadható-e a három dimenziós térben 27 pont úgy, hogy mindegyiktől pontosan 7 másik legyen 1 méternél közelebb?

4. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Összefüggő-e G, ha az éleket a következőképpen adjuk meg:
a) i és j pontosan akkor van összekötve, ha $i - j$ páratlan;
b) i és j pontosan akkor van összekötve, ha $i - j$ osztható 3-mal és $i \neq j$;
c) i és j pontosan akkor van összekötve, ha $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 8$?

Megoldás. (a): i és $i + 1$ mindig össze vannak kötve, így $a < b$-re a-ból b-be az $a, a + 1, \ldots b - 1, b$ úton eljuthatok.

(b): Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha i és j 3-mal osztva azonos maradékot ad. Így a komponensek éppen ezek a halmazok (azaz $\{1, 4, 7, \ldots, 100\}$, $\{2, 5, \ldots, 98\}$ és $\{3, 6, \ldots, 99\}$), tehát a gráf nem összefüggő.

(c): i-ből $i+1$-be így juthatunk el: $i, i+3, i+6, i+9, i+1$ vagy $i, i-3, i-6, i-9, i-1$. A kettő valamelyike minden i-re működik. Ezeket felhasználva minden a és b között tudunk sétát csinálni.

5. Hány éle van annak a gráfnak, melynek csúcsai az egész számok 1-től 100-ig, $\{i, j\}$ pedig pontosan akkor él, ha
a) $1 < |i - j| < 4$;
b) $i - j$ páros és nem 0?

Megoldás. Az élek számához a fokszámokat kell megállapítsuk, mert a fokszámok összege $= 2\cdot$ élszám. (a) esetben $1, 2$ és $99, 100$ foka 2, 3 és 98 foka 3, az összes többi (94 darab) csúcs foka 4, így az élszám $(94 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2)/2$.

A (b) esetben 3. (b)-hez hasonlóan az derül ki, hogy a gráf két komponensből áll (a páros és a páratlan számok) és a komponenseken belül teljes részgráf van (mindkettő 50 csúcsú). Tehát az élszám $2 \cdot \binom{50}{2}$.

6. Hány éle van annak az irányított gráfnak, melynek csúcsai az egész számok 1-től 100-ig, (i, j) pedig pontosan akkor él (i-ből j-be), ha
a) $j = i + 1$;
b) $i < j$;
c) $i < j$ és $j - i$ osztható 10-zel?

Megoldás. Itt elég a csúcsok ki-fokát meghatározni, mert a ki-fokok összege egyenlő a be-fokok összegével és ez az élszámot adja meg. Az (a) esetben minden csúcs ki-foka 1, kivéve a 100-at, amelyé 0. Így az élszám 99. A (b) esetben 1-ből 99, 2-ből 98 él indul ki, és így tovább, tehát az élszám $99 + 98 + \ldots + 2 + 1 + 0$, vagyis $100 \cdot 99/2$. Ezt onnan is láthatjuk, hogy a 100 csúcsú teljes gráf minden élét az egyik irányba irányítottuk, tehát a gráfnak ugyanannyi éle van, mint az irányítatlan teljes gráfnak.

7. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a fokszámok:

a) 1,1,4,4,5,6,6,7,

b) 3,3,3,4,5,5,6,7.

Megoldás. a) Az $1, 1, 4, 4$ KIS fokú csúcsok 10 élt tudnak befogadni, míg az $5, 6, 6, 7$ NAGY fokú csúcsokból legalább $(7-3)+(6-3)+(6-3)+(5-3) = 12$ kell KIS fokúakhoz menjen, tehát nincs ilyen egyszerű gráf.

(Lényeges, hogy abból, hogy ha egy KIS-NAGY fokú szétvágásra nem kapunk ellentmondást, abból nem következik, hogy van ilyen egyszerű gráf. Ezért érdemes szisztematikusan végigpróbálni az összes szétvágást.)

(b) Nem látszik természetes szétvágás, így a HAKIMI-algoritmussal rajzolhatunk ilyen gráfot. Egyszerűsít, ha áttérünk a komplementer gráfra, amelyben a fokszámok: $4, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 0$ lesznek. Az algoritmus első néhány lépése során a fokszámok így változnak: $X, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 0$; $X, X, 2, 1, 1, 1, 1, 0$; $X, X, X, 0, 0, 1, 1, 0$, ami egyetlen él. (Itt X azt jelenti, hogy a csúcsot elintéztük).

8. Az előadáson tanult HAKIMI-módszerrel rajzoljunk olyan egyszerű gráfot, melyben a pontok foka $6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2$!

Megoldás. Le kell rajzolni.

9. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a fokszámok: 1,1,3,3,5,6,6,7? Rajzoljunk olyan egyszerű gráfot, amelyben a fokszámok: 1,2,3,3,4,5.

Megoldás. Az első fajta nincs, szétvágás. A másik van, le kell rajzolni a HAKIMI algoritmussal.

10. Egy legalább négy csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka páratlan (és ezért páros sok csúcsa van). Mutassuk meg, hogy van három azonos fokú pont!

Megoldás. Gyakorlásként először azt mutatjuk meg, hogy n csúcsú egyszerű gráfban mindig van két azonos fokú csúcs. Tegyük a csúcsokat a fokszámuknak megfelelő skatulyába. Ekkor van n csúcs, n skatulya, de az $n-1$-es skatulyában és a 0-s skatulyában nem lehet egyszerre csúcs. Azaz valójában $n-1$ nemüres skatulyába helyeztük el az n csúcsot, vagyis a skatulyaelv szerint lesz olyan skatulya, amelyikbe (legalább) két csúcs kerül.

A tényleges feladatnál a skatulyák $1, 3, \ldots, 2n-1$, azaz n skatulya van, amelyekbe $2n$ csúcsot helyeztünk. Ha nem minden skatulyába került két csúcs, akkor lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább három csúcs került. Egyenletesen nem kerülhetnek a skatulyákba a csúcsok, mert akkor két olyan csúcs lenne, amelynek foka $2n-1$, azaz minden más csúccsal össze lenne kötve. Ekkor viszont nem lehetne két elsőfokú csúcs.

11. Mutassuk meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör! Igaz-e, hogy bármely pont benne van egy körben?

Megoldás. Leghosszabb út két végpontjából csak az út valamely pontjához vezethet él. A második állítás nem igaz (pl. két háromszög összekötve egy úttal: az út csúcsain át nincs kör.

12. Legyen G $2n$ csúcsú egyszerű gráf, melyben minden pont foka legalább n. Mutassuk meg, hogy G összefüggő!

Megoldás. Ha G nem lenne összefüggő, akkor legalább két komponensből állna. Ezek között lenne olyan, amelynek legfeljebb n csúcsa lenne, de akkor az ebben levő csúcsok foka legfeljebb $n-1$ lehetne.

13. Határozzuk meg az összes olyan egyszerű gráfot, melyben bármely két élnek van közös pontja!

Megoldás. Ezek a három csúcsú teljes gráf és a csillag (azaz olyan gráf, amelyben egy kitüntetett csúcs minden másikkal össze van kötve és más él nincs is. Tehát a csillag egy speciális fa. Szokták $K_{1,r}$-rel is jelölni, mert olyan teljes páros gráf, amelyben az egyik osztály 1, a másik r csúcsból áll.) Hogy más ilyen gráf nincs, az abból látszik, ha nézzük tetsz. 3 élét: ha ezek háromszöget alkotnak, nem lehet több él, ha pedig e 3 él egy közös csúcsból indul ki, akkor a további éleknek is ebből kell kiindulniuk.

14. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k, akkor a gráfban van olyan kör, mely legalább $k+1$ csúcsot tartalmaz!

Megoldás. Ötlet: leghosszabb út végpontjából kiinduló összes (legalább k) él a kör 1-1 pontjába kell menjen, a "legtávolabbi" adja a leghosszabb kört.

15. Hogy néznek ki azok az egyszerű gráfok, melyekben minden csúcs foka 2? És azok, melyekben minden fok legfeljebb 2?

Megoldás. Ilyen gráfban a 10. feladat szerint van kör. A kör csúcsaiból további él már nem is lehet, így ha a gráf összefüggő, akkor nem lehet a körön kívül csúcs, mert oda nem tudnánk eljutni a kör csúcsaiból. Ha a gráf nem összefüggő, akkor az eddigiek alapján minden komponense kör kell legyen. Ha a csúcsok foka legfeljebb kettő, akkor a komponensek körök vagy utak lehetnek.

16. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, ..., 102\}$. Van-e G-ben Euler-vonal vagy Euler-körvonal, ha az éleket a következőképpen adjuk meg:
a) $\{i, j\}$ pontosan akkor él, ha $|i - j| = 1$;
b) $\{i, j\}$ pontosan akkor él, ha $|i - j| = 1$ vagy 2;
c) $\{i, j\}$ pontosan akkor él, ha $|i - j| = 1$ vagy 2 vagy 3?
d) $\{i, j\}$ pontosan akkor él, ha $|i - j|$ páros?

Megoldás. Az a),b),c) esetben a gráf összefüggő, így alkalmazható Euler tétele, azt kell megnézni, hogy a páratlan fokú csúcsok száma 0 vagy 2-e. a) esetben minden fok 2 (a gráf mellesleg egy kör), a b) esetben a 2 és 101 csúcsok foka 3, 1 és 102 foka 2, a többi fok 4, vagyis van Euler-vonal, de nincs E-körvonal. A c) esetben 1 és 102 foka 3, 3 és 100 foka 5, azaz kettőnél több páratlan fokú csúcs van, így sem E-vonal, sem E-körvonal nincs. A d) esetben a gráf két komponenesből áll, így nem lehet olyan séta sem, amelyik a két komponenes egy-egy élén átmegy, tehát nem lehet E-(kör)vonal. (Egyébként általában ugyanezen ok miatt nem-összefüggő gráfban csak akkor lehet E-(kör)vonal, ha egy komponenst kivéve csupa izolált csúcsunk van (és ezen komponensben van E-(kör)vonal).

17. Mutassuk meg, hogy egy gráf vagy a komplementere mindig összefüggő!

Megoldás. Ha G nem összefüggő, akkor a csúcsait két nemüres részre (A és B) lehet bontani úgy, hogy A és B között ne menjen él. A komplementerben viszont akkor minden $a \in A$ és $b \in B$-t él köt össze. Ekkora komplementerben bármelyik c csúcsból el lehet jutni bármelyik d csúcsba, mert ha az egyik A-ban, a másik B-ben van, akkor a komplementerben őket él köti össze, ha pedig mondjuk $c, d \in A$-ban van, akkor választva egy tetszőleges $b \in B$-t, a c, b, d egy 2 hosszú út c-ből d-be.

18. Egy 60 csúcsú összefüggő gráf minden pontjának foka 4. Mutassuk meg, hogy élei kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsba két piros és két kék él fusson!

Megoldás. Egy ilyen gráfban van Euler-körvonal. A gráfnak 120 éle van, így ha az Euler-körvonal éleit felváltva színezzük pirosra és kékre akkor teljesülni fog a feltétel.

19. Egy G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 30\}$, az i és j csúcsok között pontosan akkor van él, ha $|i - j| > 10$. Van-e G-ben Euler-vonal ill. Euler-körvonal?

20. Tegyük fel, hogy a G gráfban van Euler-körvonal, és v másodfokú csúcs G-ben. Mutassuk meg, hogy v-t törölve a maradékban lesz Euler-vonal.

21. Egy sakktáblát szeretnénk bejárni lóugrásban úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjünk. Lehetséges-e ez, ha
a) a tábla 4×4-es;
b) a tábla 5×5-ös;
c) a tábla 5×5-ös, és azt is megköveteljük, hogy az utolsó lépésben vissza kell érnünk a kiindulási mezőre?

Megoldás. Minden esetben Hamilton-kört vagy H-utat keresünk abban a gráfban, amelyben az élek a lóugrással elérhető mezőket kötik össze. a): az órán szerepelt szükséges feltételt alkalmazhatjuk: hagyjuk el a középső 4 mezőt (csúcsot). A maradék gráfban lesz 4 izolált csúcs (a sarkok), valamint két 4 hosszú kör, azaz összesen hat komponens. Eszerint sem H-kör, sem H-út nincs. b): ezt lehet, ki kell próbálni. c): a szóbanforgó gráf páros (a mezők feketék és fehérek, a ló ellenkező színre lép). Mivel minden lépésben színváltás történik, de az egyik színből eggyel több mező van, nem érhetek vissza a kiindulási mezőbe.

22. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Van-e G-ben Hamilton-út, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: i és j között pontosan akkor van él, ha

(a) $|i - j| = 2$ vagy 3;
(b) $|i - j|$ pros;
(c) $|i - j| > 23$?
(Ez tehát három különböző feladat.)

Megoldás. (a) A Hamilton-út: $1, 3, 5, 2, 4, 6, \ldots$, ahol a 6-tól a $+2, +2, -3, +2, +2$ minta ismétlődik. Sőt H-kör is van, pl. $1, 3, 6, 8, \ldots, 96, 99, 97, 100, 98, 95, \ldots, 5, 2, 4, 1$. A $\ldots$-nál mindkétszer kettesével ugrálunk.

(b) Ez a gráf nem is összefüggő, így nem lehet benne H-út.

(c) H-út pl. ez: $1, 51, 2, 52, 3, 53, \ldots, 49, 99, 50, 100$. Mivel itt 100 és 1 is össze vannak kötve, így itt H-kör is van.

23. Egy gráf csúcsai $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Az i és j között pontosan akkor van él, ha $i \neq j$ és a két szám valamelyike osztható a másikkal. Van-e a gráfban H-út?

24. Adjunk példát olyan egyszerű összefüggő gráfra, amelyben van Euler-körséta, de nincs Hamilton-út!

25. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, ..., 30\}$. $\{i, j\}$ pontosan akkor él, ha i és j relatív prímek.

(a) Van-e G-ben Euler-vonal vagy körvonal?

(b) Van-e G-ben Hamilton-út vagy Hamilton-kör?