Gráfok

A gráfokat bizonyos dolgok közti kölcsönös kapcsolatok modellezéséhez használhatjuk. Ilyenek pl. ismeretségek egy társaságban (ha azt kölcsönösnek tételezzük fel), tárgyak adott elhelyezésében az érintkezés kapcsolat, egy halmaz részhalmazai között az, hogy metszetük nem üres, pontok vagy alakzatok között az, hogy adott értéknél kisebb (egyenlő, nagyobb) a távolságuk, könyvespolcon levő könyveknél az, hogy egymás mellett vannak, stb.

Szemléletesen a gráf fogalma a következő: legyenek a síkon megadva bizonyos *pontok* más szóval *csúcsok* ("a dolgok"), és közülük bizonyosak legyenek összekötve (amelyek a "kölcsönös kapcsolatban" vannak). Egy-egy ilyen összekötő vonalat *élnek* nevezünk. (Ezek az élek legyenek olyanok, hogy a megadott pontok közül csak végpontjukon mennek át, vagyis az élről látjuk, hogy melyik két csúcsot köti össze.) Pontok és élek egy ilyen rendszerét fogjuk *gráfnak* hívni. Ennek alapján lényegtelen, hogy a pontok, ill. az összekötő élek hogyan vannak lerajzolva, csak az lényeges, hogy a pontok közül melyek vannak összekötve. Ez azt is jelenti, hogy lényegtelen, hogy két él metszi-e egymást vagy sem. (Szemléletesen: az éleknek megfelelő utak többszintes kereszteződésnek felelnek meg.) Azt a két pontot, amelyet egy él összeköt, az él *végpontjainak* nevezzük. Ha a kapcsolat nem lenne kölcsönös, hanem egyirányú, akkor az él azon végére, "amelyik irányba megy a kapcsolat", egy kis nyilat rajzolhatunk.

Jegyezzük meg, hogy elképzelhető, hogy egy él egy pontot saját magával köt össze, ilyenkor *hurokélnek* nevezzük. Az is lehetséges, hogy ugyanazt a két pontot több különböző él is összeköti. Az ilyen éleket *többszörös (vagy párhuzamos)* éleknek nevezzük. Ha egy gráfban se többszörös él nincs, se hurokél, akkor azt *egyszerűnek* hívjuk. (A gráfokat definiálhatnánk absztraktabbul is: legyen $V(G)$ egy halmaz (a csúcsok halmaza), $E(G)$ egy ettől diszjunkt halmaz (az éleké), és legyen megadva egy olyan f függvény, amely $E(G)$ elemeihez $V(G)$-beli elempárokat, vagy elemeket rendel. Szemléletesen a hozzárendelt pár az él két végpontja, ha pedig egy elemet rendelünk, akkor hurokélről van szó. Ez azt is jelenti, hogy két különböző élnek lehet azonos a két végpontja. Az absztrakt megadásból a fenti szemléleteshez úgy jutunk el, hogy a síkon $V(G)$ minden eleméhez felveszünk egy csúcsot, két csúcsot pedig akkor kötünk össze, ha van olyan él (azaz $E(G)$-beli elem), amelynek ők a végpontjai. Az élre "ráírjuk" a megfelelő $E(G)$-beli elemet. Próbáljuk meg a későbbi fogalmakat absztrakt módon is definiálni.)

Az egyszerű gráfokat "absztrakt" módon kényelmesebben is definiálhatnánk: legyen $V(G)$ egy halmaz (elemeit pontnak nevezzük), és legyen $E(G)$ a $V(G)$ bizonyos kételemű részhalmazainak halmaza. Ekkor a $G = (V(G), E(G))$ párt *(egyszerű) gráf*nak nevezzük. Valóban, rajzoljunk egy-egy pontot $V(G)$ minden elemének megfeleltetve, és kössük össze éllel azokat a pontpárokat amelyeknek megfelelő kételemű halmaz $E(G)$-beli. Jelöljük egy X halmaz kételemű részhalmazainak halmazát $\binom{X}{2}$-vel.

A továbbiakban mindig $V(G)$ jelöli a G gráf pontjait, $E(G)$ pedig az éleit. Az egyszerűség kedvéért minden gráf véges lesz (ez nem lenne szükségszerű).

A G és G' (egyszerű) gráfok *izomorf*ak, ha van $V(G) \cup E(G)$ és $V(G') \cup E(G')$ között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy annál pontnak pont, élnek él felel meg, és egy él két végpontjának a neki megfelelő él két végpontja felel meg. Nem összekötött csúcsoknak megfelelő csúcsok G'-ben sincsenek éllel összekötve. (Mit jelent ez az absztrakt definíció mellett? A φ leképezés izomorfizmus, ha $V(G)$-t $V(G')$-re, $E(G)$-t $E(G')$-re kölcsönösen egyértelmű módon úgy képezi le, hogy a $\varphi(e)$ él végpontjai éppen az e végpontjainak φ-nél vett képei.)

Azt az egyszerű gráfot, amelynek nincs éle, *üres gráfnak*, azt amelyben bármely két különböző csúcs össze van kötve, *teljes gráfnak* nevezzük. Az n csúcsú teljes gráfnak $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ éle van.

Ha G egyszerű gráf, akkor G *komplementere* az a $\bar{G}$ egyszerű gráf, amelyben pontosan azok a pontpárok között van él, amelyek között G-ben nem volt. Formálisan: $\bar{G}$-re $V(\bar{G}) = V(G)$, $E(\bar{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$.

Ha tekintjük $V(G)$ egy $V(H)$ részhalmazát valamint **bizonyos** a $V(H)$-beli pontokat összekötő élek egy $E(H) \subseteq E(G)$ részhalmazát, akkor a $(V(H), E(H))$ pár G egy H részgráfját alkotja. Ha **minden** olyan $E(G)$-beli élt beveszünk $E(H)$-ba, amelyek végpontjai $V(H)$-beliek, akkor H-t *feszített részgráf*nak nevezzük.

Néhány alapvető definíció:

1. *séta*: egy $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_s, e_s, v_{s+1}$ sorozat, ahol $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ és az e_i él két végpontja éppen v_i és v_{i+1}. v_1-et a séta kezdőpontjának, v_{s+1}-et a végpontjának nevezzük.

2. *körséta*: olyan séta, amelyben $v_1 = v_{s+1}$ ($s = 0$ lehetséges).

3. *vonal*: olyan séta, amelyben az élek páronként különbözőek.

4. *körvonal*: olyan körséta, amelyben az élek páronként különbözőek.

5. *út*: olyan séta, amelyre $v_i \neq v_j$, $e_k \neq e_l$. Jegyezzük meg, hogy ez azt is jelenti, hogy út kezdőpontja és végpontja **nem lehet** azonos. Az s számot (azaz az út éleinek számát) az út hosszának nevezzük. (Jegyezzük meg, hogy elegendő lenne a pontok különbözőségét megkívánni.)

6. *kör*: olyan körséta, amelyben $v_i \neq v_j$, ha $i, j \neq s+1$ (tehát $e_i \neq e_j$). Magyarul kör esetén a kezdőpont és végpont azonos, más egyezés viszont nincs a sétában. Az s megint a kör hossza. $s = 1$ esetén körünk egy csúcsból és egy hurokélből áll, $s = 2$-re két csúcsunk és két párhuzamos élünk van. $s \geq 3$-ra körünk az s-szögnek felel meg.

Lássuk, mik a legalapvetőbb tulajdonságaik sétáknak és utaknak, ill. körsétáknak és köröknek:

Mindenekelőtt azt vegyük észre, hogy egy a-ból b-be vezető út (vonal, séta) megfordítása is út (vonal, séta), továbbá, hogy egy a-ból b-be vezető és egy b-ből c-be vezető séta egymás után fűzése a-ból c-be vezető séta. (Ha két utat fűzünk egymás után, az eredmény nem biztos, hogy vonal.)

I. Ha van olyan séta, amelynek kezdőpontja a, végpontja b és $a \neq b$, akkor van olyan út is, amelynek kezdőpontja a, végpontja pedig b.

Valóban: ha egy pontot többször érintünk a séta során, akkor az első és utolsó érintése közötti sétát elhagyhatjuk.

Ha egy a-ból b-be vezető út után fűzzük ugyanezt az utat az ellenkező irányban, akkor körséta keletkezik ugyan, de ez semmit nem mutat a gráf szerkezetéről. Így az ilyen jellegű körsétákat ki kell zárjuk.

II. ha egy körsétában van egyszer szereplő él, akkor belőle mindig kiválaszthatunk kört.

Legyen ez az él az e_i él, amely a v_{i-1} és v_i csúcsokat köti össze. Ekkor $v_i, e_{i+1}, \ldots, v_n = v_1, e_1, \ldots, v_i$ olyan séta, amelyben nem szerepel az e_i él. Ezt I. alapján v_i-ből v_{i-1}-be vezető úttá rövidíthetjük, amelyet kiegészítve az e_i éllel valóban kört kapunk.

III. Körvonal éldiszjunkt körök uniójára bontható.

Ugyancsak rövidítéssel.

Azt mondjuk, hogy egy G gráf *összefüggő*, ha bármely két pontjához van olyan séta, amelynek ez a két pont a kezdő ill. végpontja. Az a, b pontpár úttal összeköthető, ha van a kezdőpontú, b végpontú út. A fenti I. megjegyzés miatt itt $a \neq b$-re utat is mondhatunk. Így ha egy gráf összefüggőségét szeretnénk bizonyítani, akkor elég tetszőleges pontpár között sétát találni, ha viszont felhasználjuk azt, hogy egy gráf összefüggő, akkor a pontpárok közti utak létezéséből indulhatunk ki.

Az úttal való összeköthetőség ekvivalencia-reláció, a megfelelő ekvivalencia-osztályokat a gráf *komponenseinek* nevezzük. Ez egy ijesztő megfogalmazás, valójában a következő egyszerű dologról van szó: vegyünk ki egy pontot (pl. a) és tekintsük azon pontok halmazát (legyen ez A), ahova ebből az a pontból úttal eljuthatunk. Az A halmaz bármely két pontja között van séta, azaz A összefüggő. Legyen ugyanis $u, v \in A$. Az A definíciója szerint van a-ból u-ba vezető út, és a-ból v-be vezető út is. Fordítsuk meg ez utóbbiban az élek sorrendjét (így v-ből a-ba menő utat kapunk), majd fűzzük hozzá az a-ból u-ba menő utat. Így egy $v \to u$ sétát kapunk. Mivel u, v tetszőleges volt, A valóban összefüggő. Ha ezzel a gráf összes pontját kimerítettük, akkor a gráf összefüggő volt. Ha nem, akkor A-beli pontból csak A-beli pontokba vezethet él. Csináljuk az előbbit egy $b \notin A$ ponttal, a belőle kiinduló utak végpontjainak halmaza legyen B. Mint előbb, B megint összefüggő. A és B diszjunkt kell legyen, hiszen ha $w \in A \cap B$ lenne, lenne akkor a-ból u-ba út, lenne b-ből u-ba út. Megfordítás és egymás után fűzés azt mutatná, hogy lenne a-ból b-be menő út is, de akkor b-nek A-ban kellene lennie. Az így keletkező $A, B, \ldots$ halmazok a gráf *komponensei.*

Összefüggő gráfnak egyetlen komponense van, egyébként pedig a különböző komponensek diszjunktak, mint láttuk. Eszerint, ha egy gráf **nem összefüggő**, akkor úgy képzelhetjük el, hogy csúcsai diszjunkt részekre vannak osztva, és él csak azonos részeken belüli csúcsok között vezet.

Egy $v \in V(G)$ pont *fokszáma* a v-ből kiinduló élvégek száma. Ez más szóval a pontból kiinduló hurokélek számának a duplája + a pontból kiinduló nem hurokélek száma. (Ha tehát a pont egy picike környezetét tekintjük, abban ennyi vonal lesz.) A v pont fokszámát (vagy röviden fokát) $\deg(v)$ fogja jelölni. Ha egy csúcs foka 0, akkor *izolált* pontnak nevezzük.

Tétel. *Egy gráf pontjai fokszámának összege megegyezik az élek számának kétszeresével, azaz*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|.$$

A Tétel bizonyításához csak azt kell meggondolnunk, hogy az egyenlőség mindkét oldala az "élvégeket" számolja meg, a bal oldal pontról pontra, a jobb oldal pedig egyszerűen úgy, hogy minden élnek két végpontja van. Jegyezzük meg, hogy ezért járul egy hurokél kettővel végpontjának fokához.

Sok feladatban előjönnek a páros gráfok, pl. akkor amikor olyan fiú-lány kapcsolatokat szemléltetünk, amelyek csak ellenkező neműek között lehetnek. Ilyenkor a csúcsok halmaza két diszjunkt részre van osztva, és élek csak a különböző részekbe tartozó csúcsok között mehetnek. A két osztály csúcsait pirosra illetve kékre színezve úgy képzelhetjük, hogy minden él két végpontja különböző színű. Ezekre a gráfokra a fokszámok összegére vonatkozó összefüggés még erősebben érvényes.

Tétel. *Egy páros gráfban az egyik osztály pontjai fokszámának összege megegyezik az élek számával, és így a másik osztály pontjai fokszámának összegével. Azaz, ha P és K a két osztály, ahol $V(G) = P \cup K$, akkor*

$$\sum_{v \in P} \deg(v) = |E(G)| = \sum_{v \in K} \deg(v).$$

Ez az összefüggés akkor is érvényes, ha a páros gráfban vannak többszörös élek. Például egy táncmulatság esetén (ahol mindig csak fiú-lány párok táncolnak), ha minden fiútól megkérdezzük, hogy hány lánnyal táncolt és a válaszul kapott eredményeket összeadjuk, majd ugyanezt tesszük a lányoknál is, akkor a kétféle összeg ugyanaz lesz. Ha minden fiútól és lánytól azt kérdezzük, hogy hányszor táncolt (persze lehet, hogy egy fiú és egy lány többször is táncoltak), akkor szintén az lesz a helyzet, hogy a fiúk válaszainak összege megegyezik a lányok válaszainak összegével (és ebben az esetben ez az összeg azt mondja, hogy összesen hány tánc volt). Az első esetben páros gráfunkban egy fiúnak és egy lánynak megfelelő pontot éllel kötünk össze, ha valamikor táncoltak egymással. A második esetben annyi többszörös éllel kötjük őket össze, ahányszor táncoltak.

A páros gráfok egy nagyon fontos – lehetetlenségi bizonyításokban gyakran hasznos – tulajdonsága, hogy nincsen bennük páratlan hosszú kör. (Valóban, egy ilyen körben a csúcsok színe váltakozva piros és kék lenne, de ha a kör hossza páratlan, akkor a visszaérkezéskor pont ellenkező színt kapnánk). Ha tehát megkérdezzük otthonában Józsi bácsit, hogy hányszor kelt át ma a folyón és azt a választ kapjuk, hogy ötször, akkor tudjuk, hogy nem mondott igazat (persze akkor, ha valahonnan tudjuk, hogy reggel még otthon volt). Az is megmutatható, hogy ha egy gráfban nincs páratlan kör, akkor pontjai két színnel kiszínezhetők úgy, hogy él csak különböző színű pontok között menjen.