Folyamokkal kapcsolatos fogalmak

Ez a rövid emlékeztető csak azt foglalja össze, hogy mik a legfontosabb fogalmak és tételek, melyeket folyamokkal kapcsolatban tanultunk (követjük az ajánlott KRS jegyzet jelöléseit).

Definíciók. G irányított gráf, s, t két kitüntetett csúcsa (termelő, ill. fogyasztó). Minden e élhez hozzá van rendelve egy $c(e)$ nemnegatív valós szám, melyet az e él *kapacitásá*nak nevezünk. (Ezt eddig *hálózat*nak szokták nevezni.)

*Folyam*nak egy $f : E(G) \to \mathbf{R}^+$ (azaz az élekhez nem-negatív valós számot rendelő) függvényt nevezünk (tehát $\mathbf{R}^+$ a nemnegatív valós számokat jelöli), ha

(1) $f(e) \leq c(e)$ minden $e \in E(G)$ élre, és

(2) minden $v \neq s, t$ pontra $m(v) = \sum_{e=(v,x)} f(e) - \sum_{e'=(y,v)} f(e') = 0$.

Megmutatható, hogy ilyenkor (a (2)-ben szereplő képlettel definiált) m-re $m(s) = -m(t)$. Ezt a közös értéket a *folyam érték*ének hívjuk, és m_f-fel jelöljük. Egy e él *telített*, ha $f(e) = c(e)$, különben *telítetlen*.

Célunk **maximális értékű folyam**ot keresni.

A definíciók szemléletes tartalma: s-ből t-be minél több folyadékot szeretnénk eljuttatni. Az élek a csövek, a kapacitás az, hogy egy csövön mennyi folyadék mehet át. A fenti (2) tulajdonság azt jelenti, hogy minden csúcsból annyi folyadék megy ki, mint amennyi bejött (ez olyan, mint a Kirchhoff törvény). (1) azt jelenti, hogy egy csövön a kapacitásánál nem lehet több folyadékot átjuttatni. Az $m(s) = -m(t)$ szemléletesen azt jelenti, hogy amennyi folyadék kimegy s-ből, az meg is érkezik t-be.

Definíció. *Javító út*nak nevezünk egy olyan $s = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = t$ utat, amelyben a v_i és v_{i+1} között valamelyik irányban van él, és ha ez v_i-től v_{i+1}-be mutat (azaz $e_i = (v_i, v_{i+1})$), akkor $f(e_i) < c(e_i)$, vagyis az él telítetlen, míg ha az él fordított irányban szerepel (azaz $e_i = (v_{i+1}, v_i)$), akkor $f(e_i) > 0$. (Tehát a javító út nem feltétlen irányított út a hálózatban.)

Tétel. Egy f folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s-ből t-be.

A tételt kicsit más formában is megfogalmazhatjuk. Ehhez szükség van a vágás fogalmára.

Definíció. Legyen X a G csúcsainak egy s-et tartalmazó része, melyre $t \in V - X$. Azon élek C halmazát, amelyeknek egyik végpontja X-ben, másik $V - X$-ben van, a hálózat egy (s, t)-*vágásá*nak nevezzük. A *vágás értéke (kapacitása)* (jele: $c(C)$) azon élek kapacitásainak összege, amelyek kezdőpontja X-ben, végpontja $V - X$-ben van. Formálisan $c(C) = \sum c(e)$, ahol az összegzés azon $e = (x, y)$ élekre megy, ahol $x \in X, y \in V - X$.

Szemléletesen egy vágás megfelel a pontok két részre osztásának (s az egyik t a másik részben van), a vágás kapacitása pedig az a folyadékmennyiség, amely az s-et tartalmazó részből a t-t tartalmazó részbe átmehet, ha minden a vágásban levő, s-től t felé irányított élt teljes kapacitással használunk, visszafelé pedig nem jön folyadék. Jegyezzük meg, hogy az f folyamnak a definícióban nincs szerepe. Ha nem a kapacitásokat, hanem az $f(e)$ értékeket adnánk össze (úgy értve, hogy a visszafelé mutató éleken $f(e)$-t negatív előjellel vesszük), akkor a folyam értékét, m_f-et kapjuk.

Tétel (Ford–Fulkerson) A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével (kapacitásával), azaz $\max\{m_f : f \text{ folyam}\} = \min\{c(C) : C \text{ vágás}\}$.

Ha találunk olyan f folyamot és olyan C vágást, amelyre $m_f = c(C)$, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a folyam maximális.

A javító utakat úgy kerestük, hogy definiáltunk G-hez egy segédgráfot, és ebben kerestünk s-ből t-be vezető irányított utat. Láttunk rá példát, hogy a javító utakat ügyetlenül választva nagyon sok lépés kellett a maximális folyam megtalálásához. Ezen segít Edmonds és Karp tétele, amely azt mondja, hogy ha mindig a *legrövidebb* javító utat vesszük, akkor a lépésszám a pontok számának polinomja lesz. Megjegyeztük azt is, hogy ha a kapacitások egész számok, akkor a maximális f folyam értéke, sőt van olyan maximális folyam, amelyre az $f(e)$ értékek is egész számok.