Catalan számos feladatok

1. Bill és Mary az egyenes folyású James River egyazon oldalán laknak a vadnyugaton. Bill elindul meglátogatni Maryt, ám előtte útba akarja ejteni a folyót, hogy lovát megitassa. Melyik a lehető legrövidebb út Bill számára?

2. Egy csiga mászik az $y = 3$ és az $y = -1$ egyenlettel leírható vonatsínek között az $A = (0; 0)$ pontból a $B = (21; 2)$ pontba úgy, hogy menet közben mindkét sínt érinti. Mennyit kellett legalább másznia?

3. Hányféleképpen olvashatjuk ki a TÜKÖRKÉP szót az alábbi táblázatból?

T	Ü	K		
Ü	K	Ö	R	
K	Ö	R	K	É
Ö	R	K	É	P

4. **a)** Hányféleképpen juthatunk el az origóból a $(20, 0)$ pontba, ha $\nearrow$ és $\searrow$ irányba léphetünk rácspontról rácspontra?
b) És ha eközben érintjük az $y = -1$ egyenest?
c) És ha nem érinthetjük az $y = -1$ egyenest?

5. Hány szintaktikailag helyes zárójelezés van n pár zárójel használatával? (Pl. „(()())” helyes, „)(()” és „(()))(” nem.)

6. Hányféle sorrendben mehet be 14 fiú és 23 lány a táncterembe, ha minden pillanatban legalább annyi lánynak kell bent lennie, mint fiúnak? És ha a fiúk, illetve lányok egymás közti sorrendje nem számít?

7. Egy szűk alagútban n hangya sétál egymás mögött. Egymás mellett nem férnek el, így nem tudnak előzni vagy lemaradni, ám egyszercsak egy kis oldalelágazáshoz érnek, amiben egy hangya éppen elfér. Ha üres, a soron következő hangya betérhet a mellékágba, majd később visszasorolhat két társa közé folytatni a menetelést. Hányféle sorrend alakulhat ki a hangyák közt? Adj rá rekurziót!

8. **a)** Hányféleképpen juthatunk el az origóból a $(16, 8)$ pontba, ha minden lépésben jobbra vagy fölfelé ugorhatunk? És a $(18, 9)$ pontba? És a $(8, 6)$ pontba?
b) És ha ugyanez a feladat, de most jobbra-fel, illetve jobbra-le ugrálhatunk?

9. Hányféleképpen lehet jobbra, illetve fölfele lépésekkel eljutni a $(0; 0)$ pontból a $(10; 13)$ pontba, ha közben sohasem léphetünk olyan $(x; y)$ pontra, ahol $x - y = 5$?
10. **a)** Hány olyan $2n + 1$ hosszúságú ± 1 sorozat van, melyben bármely kezdőszelet összege pozitív (azaz $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 > 0$,...,$a_1 + a_2 + ... + a_{2n+1} > 0$) és a számok összege 1?

b) És ha a kezdőösszegekre azt követeljük meg, hogy legalább -3-nak kell lenniük?

11. Egy kerek asztal körül $2n$ ember ül. Hányféleképpen alkothatnak n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik kezet fogó pár keze alatt vagy felett kellene átnyúlniuk?

12. Egy barlangászcsapatban 23 férfi és 15 nő van. Olyan sorrendben szeretnének egy barlang kijáratán kimászni, hogy minden pillanatban legalább annyi férfi maradjon bent, mint nő. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

13. Egy szűk alagútban n hangya sétál egymás mögött. Egymás mellett nem férnek el, így nem tudnak előzni vagy lemaradni, ám egyszercsak egy ugyanolyan szűk, hosszú oldalelágazáshoz érnek, amiben bárhány hangya elfér egymás mögött. A soron következő hangya mindig betérhet a mellékágba, illetve a mellékág elején levő hangya bármikor visszasorolhat két társa közé folytatni a menetelést. Máshol nem tudnak visszatérni a sorba, és végül mindenki beáll a menetbe. Hányféle sorrend alakulhat ki a hangyák közt?