Catalan-számok

Kezdjük a tárgyalást két olyan feladattal, amely az első félévben már előfordult, vagy előfordulhatott volna. Mindkettő a koordinátarendszer rácspontjain való sétákkal kapcsolatos.

1. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el az origóból az (a, b) pontba (a, b nemnegatív egész számok), ha minden lépésben vízszintesen jobbra vagy függőlegesen felfele léphetünk szomszédos rácspontra?*

Természetesen $a + b$ lépést kell tegyünk, ebből kell kiválasztani azt az a lépést, amikor vízszintesen lépünk. Így a lehetőségek száma $\binom{a+b}{a}$.

2. Feladat. *Hányféleképpen juthatunk el az origóból az (a, b) pontba (a, b egész számok $a \geq 0$), ha minden lépésben ferdén felfelé vagy ferdén lefelé léphetünk szomszédos rácspontra?*

Jelöljük f-fel illetve ℓ-lel a (ferdén) felfele illetve lefele lépések számát. Mivel minden lépésben eggyel növeljük az x-koordinátát, $f + \ell = a$. Mivel a felfele lépéskor az y-koordináta $+1$-gyel, lefelé lépéskor -1-gyel változik, $f - \ell = b$. A két egyenletet összeadva $2f = a + b$ adódik. Így a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy $a+b$ páros legyen. A megoldások száma $\binom{a}{f} = \binom{a}{(a+b)/2}$, hiszen az a lépés közül kell kiválasztani azt az f-et, amikor ferdén felfelé lépünk. A binomiális együttható értelmességének az is feltétele, hogy $0 \leq (a + b)/2 \leq a$ legyen. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az (a, b) pont benne kell legyen az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek közti, az x-tengely pozitív felét tartalmazó szögtartományban. Jegyezzük meg, hogy ha az $\binom{n}{m}$ binomiális együtthatót 0-nak definiáljuk, ha $m < 0$ vagy ha $m > n$ (összhangban azzal, hogy az n elemű halmaznak ilyen m-ekre nincsen m elemű részhalmaza), akkor a képlet formálisan minden olyan esetben értelmes lesz, amikor $a + b$ páros.

Folytassuk egy olyan feladattal, amely korábban a zöld érettségi példatárban szerepelt. A későbbiekben *„Sor a pénztárnál”* feladatként hivatkozunk majd rá.

Tegyük fel, hogy egy mozi pénztáránál $2n$ ember áll sorban, közülük n embernek 10, n-nek 20 Ft-osa van. Hány olyan sorrendje van a 10 és 20 Ft-osoknak, melyben a pénztáros mindig vissza tud adni, ha kell. Kezdetben nincsen 10 Ft-os a pénztárban.

Mielőtt a feladat megoldására térnénk, idézzünk fel egy középiskolai geometria feladatot. Piroska (P) és nagymamája (N) a folyó (f) ugyanazon partján lakik. Piroska a lehető legrövidebb úton szeretne úgy eljutni a nagymamához, hogy közben vizet vesz a folyónál. A megoldás a tükrözés alkalmazása: Tükrözzük N-et f-re, így N'-t kapjuk. Kössük össze P-t N'-vel egyenes szakasszal. Ha ennek az f-fel való metszéspontja és N' közti darabját tükrözzük f-re, akkor megkapjuk a legrövidebb P-ből N-be vezető, f-et érintő utat. Ahhoz, hogy ez a megoldás tényleg jó, azt kell meggondolnunk, hogy kölcsönösen egyértelmű és hossztartó megfeleltetés van az f-et érintő $P \to N$ és a $P \to N'$ utak között. Ez a megfeleltetés a következő: tekintsük az út utolsó f-en levő pontját X-et (a P f-re való vetületétől N f-re való vetülete felé), majd az út X és N közötti részét tükrözzük f-re. Mind a kölcsönös egyértelműség, mind a hossztartás a tükrözés tulajdonságaiból, valamint abból következik, hogy minden $P \to N'$ út metszi f-et. Az ötletet gyakran *tükrözési elvnek* nevezik.

Lássuk hogyan lehet a tükrözési elvet a „Sor a pénztárnál” problémára alkalmazni. Jelöljük a megoldások számát C_n-nel. C_n kifejezéséhez ábrázoljuk a helyzetet koordináta-rendszerben, a vízszintes tengelyen a kiszolgált nézők számát, a függőlegesen pedig a pénztárban levő 10 Ft-osok számát tüntessük fel. Ez tehát azt jelenti, hogy ha valaki 10 Ft-ossal fizet, akkor jobbra felfelé szomszédos rácspontra lépünk a koordináta-rendszerben, ha 20 Ft-ossal, akkor jobbra lefelé. Alkalmazzuk a „Dobjuk ki a rosszat!” ötletet. A vándorlás az origóból indul és a $(2n, 0)$ pontba érkezik, közben n-szer léptünk ferdén felfelé, n-szer ferdén lefelé. Így az összes ilyen utak száma $\binom{2n}{n}$. Rosszak azok az utak, amelyek az x-tengely alá mennek, azaz érintik az $y = -1$ egyenletű *tiltott egyenest.* Ezeket az utakat a tükrözési elv segítségével kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetjük az origóból a végpont tiltott egyenesre való tükörképébe menő utaknak. Valóban, tekintsük az $y = -1$-et érintő úton az utolsó olyan pontot, amely az $y = -1$ egyenesen van, és az út ezen pont utáni részét tükrözzük a tiltott egyenesre. Mivel a tiltott egyenes vízszintes, a ferde felfele lépés tükörképe ferde lefele lépés, és viszont, így a megfeleltetés értelmes, és egyértelmű is. Az eddigi példához hasonlóan a megfeleltetés visszafelé is egyértelmű, mert minden az origóból a tükörképhez vezető út metszi a tiltott egyenest, így lesz egy legutolsó metszéspont is. Konkrétan a tükörkép a $(2n, -2)$ pont, és az origóból a $(2n, -2)$ pontba vezető utak száma a 2. Feladat alapján $\binom{2n}{(2n-2)/2}$, azaz $\binom{2n}{n-1}$. Így a „Sor a pénztárnál” feladat megoldása $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. A binomiális együtthatós kifejezést faktoriálisokkal felírva a

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

alakot kapjuk, amit közös nevezőre hozva és egyszerűsítve a

$$C_n = \frac{(n+1) \cdot (2n)! - n \cdot (2n)!}{n!(n+1)!}$$

kifejezéshez jutunk, ami a $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ alakot adja.

Definíció. A fenti C_n-et Catalan belga matematikus tiszteletére Catalan-számoknak nevezzük.

Nem-negatív részletösszegek. A „Sor a pénztárnál feladatot könnyen lefordíthatjuk olyan sorozatokra, amelyeknek minden eleme ± 1, és minden részletösszege nemnegatív. Legyen $a_1, \ldots, a_{2n}$ olyan sorozat, amelyre $a_i = \pm 1$ minden $i = 1, \ldots, 2n$-re, $a_1 + \ldots + a_{2n} = 0$ és az $s_j = a_1 + \ldots + a_j \geq 0$ minden $j = 1, \ldots, 2n$-re. Az ilyen ± 1-sorozatok száma a C_n Catalan-szám.

Valóban, ez a sorozat a „Sor a pénztárnál” feladat egy másik leírása, a jobbra felfele lépésnek a $+1$, a lefele lépésnek a -1 felel meg, az s_j részletösszegek pedig éppen azt tartják számon, hogy a j-edik lépés után milyen y-koordinátájú pontban vagyunk.

Ezzel a megfogalmazással nem nehéz látni a Catalan-számokra vonatkozó rekurziót (és így nem kell rajzolni sem). Először oldjuk meg a „Nem-negatív részletösszegek” feladat alábbi erősítését, melyet „Pozitív részletösszegek” feladatnak nevezünk majd.

Legyen $a_1, \ldots, a_{2n}$ olyan sorozat, amelyre $a_i = \pm 1$ minden $i = 1, \ldots, 2n$-re, $a_1 + \ldots + a_{2n} = 0$ és az $s_j = a_1 + \ldots + a_j > 0$ minden $j = 1, \ldots, 2n-1$-re.

Egy ilyen sorozat szükségképp $+1$-gyel kezdődik és -1-gyel végződik, így ezek elhagyása után keletkező $b_1 = a_2, b_2 = a_3, \ldots, b_i = a_{i+1}, \ldots, b_{2n-2} = a_{2n-1}$ sorozat részletösszegei nem-negatívak, hiszen a b sorozat részletösszegei eggyel kisebbek az a sorozaténál. Így az ilyen b-sorozatok száma, vagyis az eredeti a-sorozatok száma éppen C_{n-1}.

Ennek segítségével nem nehéz rekurziót felírni a Catalan-számokra.

Állítás. A C_n Catalan-számokra teljesül a

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}$$

rekurzió.

Bizonyítás. Osszuk diszjunkt részfeladatokra a nem-negatív részletösszegek feladatát aszerint, hogy melyik az a legelső részletösszeg, amelyik 0. Ez csak páros sok tagnál következhet be, azaz valamely $i \geq 1$-re $s_{2i} = a_1 + \ldots + a_{2i} = 0$. A pozitív részletösszeg feladat alapján az ilyenek száma C_{i-1}. Ennyi lehetőségünk van adott $i \geq 1$-re a sorozat első részének megválasztására. A sorozat második része, azaz az $a_{2i+1}, \ldots, a_{2n}$ tagok egy $2(n-i)$ hosszúságú nem-negatív részletösszegű sorozatot alkot, így ezekre C_{n-i} választásunk van a sorozat első részétől függetlenül. Abban az esetben ha $i = 2n$, azaz ha az eredeti sorozat részletösszegei pozitívak, az előző feladat alapján C_{n-1} lehetőségünk van. Mivel $C_0 = 1$, ezt felíhatjuk $C_{n-1}C_0$ alakban is. Ekkor éppen az állításban szereplő képletet kapjuk. $\square$

Lássunk néhány tipikus feladatot:

Hányféleképpen mehet be 12 fiú és 14 lány egy táncterembe, ha odabent mindig legalább annyi lány kell legyen, mint fiú.

A belépő lány jelentsen jobbra lefele, a fiú pedig jobbra felfele való lépést. Így az origóból induló, $(26, -2)$-be vezető utat kapunk. A feltételünk miatt utunk nem érintheti az $y = 1$ egyenest (*tiltott egyenes*). A „Sor a pénztárnál" feladathoz hasonlóan az összes utak száma $\binom{26}{12}$, a rossz (tiltott egyenest érintő) utak pedig megfelelnek az origóból a végpont tükörképéhez vezető utaknak. A tükörkép $26, 4)$, így a 2. Feladat szerint ide $\binom{26}{(26+4)/2} = \binom{26}{15} = \binom{26}{11}$ út megy, vagyis a jó utak száma $\binom{26}{12} - \binom{26}{11}$. Jegyezzük meg, hogy ez tulajdonképpen a bemenő fiú-lány sorrendek számát adja meg, ha a bemenő emberek megkülönböztethetőek, akkor ezt az eredményt meg kell szorozzuk $12! \cdot 14!$-sal, hiszen az adott sorrendet a konkrét emberekkel ennyiféleképpen tudjuk kitölteni.

A feladatnak számtalan variációja van, de a megoldás lépései mindig nagyjából hasonlóak:

1) A feladatot lefordítjuk a rácspontokon való sétára.

2) Meghatározzuk a tiltott egyenest. Ennek pontjai azok a pontok, ahol a feladatban szereplő korlátozó feltétel épphogy *nem* teljesül. (Emögött az van, hogy ha

valamikor kettővel több fiú lenne a teremben, akkor ezt megelőzően kellett legyen olyan pillanat, amikor eggyel több fiú volt benn.)

3) A rácspontokon való jó séták számát a tükrözési elv segítségével „összes-rossz" alakban kapjuk, ahol a „rossz" séták száma a kezdőpontból a végpontnak a tiltott egyenesre való tükörképébe vezető séták száma.

Húzzuk még alá az előző feladatnak azt a részét, hogy gyakran a séták nem közvetlenül adják a feladat megoldását, de abból a megoldás egyszerűen következik (mint az előző feladatban a fiúk-lányok sorrendjével való beszorzással).

Végezetül lássunk néhány olyan kombinatorikai feladatot, amelyek ugyan nagyon különbözőek, mégis megoldásukat a Catalan-számok adják. Mielőtt ezekre rátérnénk, lássuk, hogy a Catalan-számok eltoltjai (pl. a C_{n-1} vagy a C_{n-2}) milyen rekurziónak tesznek eleget. Legyen tehát $A_n = C_{n-1}$. Ekkor $A_1 = 1$, továbbá a $C_{n-1} = C_0C_{n-2} + \ldots + C_iC_{n-2-i} + \ldots + C_{n-2}C_0$ miatt

$$A_n = A_1A_{n-1} + \ldots + A_{i+1}A_{n-1-i} \ldots + A_{n-1}A_1.$$

Láthatjuk, hogy a C_n-ek rekurziójában az indexek összege minden tagban $n-1$, itt pedig n volt. Hasonlóan a $B_n = C_{n-2}$ sorozatra vonatkozó rekurzió $B_2 = 1$ és

$$B_n = B_2B_{n-1} + \ldots + B_{i+2}B_{n-1-i} \ldots + B_{n-1}B_2,$$

vagyis itt az indexek összege $n+1$. Ezeket a rekurziókat fogjuk felismerni feladatainkban.

Hányféleképpen bonthatunk fel egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre?

Jelölje T_n az ilyen háromszögelések számát. $T_3 = 1$, $T_4 = 2$, $T_5 = 5$, így érezzük, hogy a Catalan számok jönnek be, tehát természetes a $T_2 = 1$ definíció. Számozzuk meg az óra járása szerint a sokszög csúcsait. A rekurzió felírásához tekintsük az $1, 2$ oldalt tartalmazó háromszög harmadik csúcsát, legyen ez i. Ez a háromszög két kisebb sokszögre vágja az eredetit, amelyeket egymástól függetlenül bonthatunk háromszögekre. A két sokszög egyike egy $(i-1)$-szög (ezért is hasznos a $T_2 = 1$ definíció, hisz $i = 3$-ra ezt kapjuk), a másik egy $(n-i+2)$-szög. Így a $T_n = \sum_{i=3}^{n} T_{i-1}T_{n-i+2}$ rekurziót kapjuk. Ha $i-1$ helyett j-t írunk, akkor az összegzés $j = 2$-től megy $j = n-1$-ig, a rekurzió pedig a fentebb B_n-re felírt rekurzió, azaz kapjuk, hogy $T_n = C_{n-2}$, hiszen a kezdeti érték is stimmel.

Az a feladat, amit maga Catalan oldott meg a következő volt:

Hányféleképpen zárójelezhetünk egy n tényezős szorzatot?

A zárójelezés azt jelenti, hogy ezután olyan kéttényezős szorzatot kapjunk, amelynek minden zárójelében két tényező szerepel (változó vagy már zárójelezett kifejezés). (Például $n = 4$ esetén a lehetséges zárójelezések

$$((x_1x_2)x_3)x_4,\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1(x_2x_3))x_4,\ x_1((x_2x_3)x_4),\ x_1(x_2(x_3x_4)).$$

Jelölje Z_n a zárójelezések számát, és legyen $Z_1 = 1$. Ha az utolsónak elvégzett szorzás előtti tényező $i \geq 1$ darab változót tartalmaz, akkor ezt a részt Z_i-féleképpen, ugyanezen szorzás másik tényezőjét Z_{n-i}-féleképpen zárójelezhetjük. Így a

$$Z_n = Z_1 Z_{n-1} + \ldots + Z_i Z_{n-i} + \ldots Z_{n-1} Z_1$$

rekurziót kapjuk, amelynek a fenti $A_n = C_{n-1}$ sorozat a megoldása.

Gyakorlaton is volt egy hasonló feladat, amelynek a C_n Catalan-számok voltak a megoldásai.

Egy kör alakú asztal körül $2n$ ember ül. Hányféleképpen foghatnak kezet úgy, hogy ne kelljen egymás keze alatt/felett átnyúlniuk?

Ezeket a feladatokat úgy oldjuk meg, hogy valamilyen módon (diszjunkt részfeladatokra bontással) rekurziót írunk fel, és megmutatjuk, hogy ez a rekurzió a Catalan-számokra vagy valamely eltoltjukra vonatkozó rekurzió. Ehhez segíthet, ha a feladat kis eseteire explicite kiszámoljuk a megoldást, mert abból kitalálhatjuk, hogy mennyivel toltuk el a Catalan-számokat. Ha ez nem a fenti két eltolt (A_n illetve B_n) valamelyike, akkor először a fentihez hasonlóan felírjuk az eltoltra vonatkozó rekurziót és megmutatjuk, hogy feladatunk megoldása ugyanazt elégíti ki.