KOMBINATORIKAI ALAPÖTLETEK

1. Egymás utáni "független" döntések (·)

Egy alkalmazás (LPV 1.3): *n elemű ($n \geq 0$ egész) halmaznak 2^n részhalmaza van.*

Az üres halmaznak csak saját maga a részhalmaza. $n \geq 1$-re az egyes elemekről függetlenül eldönthetjük, hogy elemei-e a részhalmaznak. Így minden elemnél két lehetőség van, összesen tehát 2^n.

n elemű ($n \geq 1$ egész) halmaznak 2^{n-1} páros (és ugyanennyi páratlan) elemszámú részhalmaza van.

Az előzőhöz képest annyi a változás, hogy az utolsó döntésünknél nincs választás, az itteni döntés egyértelműen meghatározza a részhalmaz elemszámának paritását.

További példát adnak az I. és III. alapfeladatok.

2. "Vagylagos" részfeladatokra bontás (+)

Ezt másképp *esetszétválasztás*nak is mondhatjuk.

Példa: Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben legfeljebb egyszer szerepel a 0?

A részfeladatok: 1) nincs 0, 2) pontosan egy 0 jegy van. Az 1) esetnek 9^5, a 2)-nek $4 \cdot 9^4$ szám tesz eleget. Itt a 4-es tényezőt az magyarázza, hogy ennyi helyre tehetjük a 0 számjegyet. A fennmaradó helyekre tetszőleges nemnulla számot írhatunk.

3. Dobjuk ki a rosszat! (−)

Példa: Hány olyan 5 jegyű szám van, amelyben van két azonos számjegy?

Az ötjegyű számok száma $9 \cdot 10^4$. Rosszak azok, melyekben *nincs* két azonos számjegy. Az ilyenek száma $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, így a keresett szám $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Az előző alapötletre adott példából is csinálhatunk olyat, amelyben a Dobjuk ki a rosszat! ötletet lehet alkalmazni: *Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben legalább két 0 jegy van?*

4. Ha többször számoltunk, de mindent ugyanannyiszor (/)

Arra gondoljunk, hogy ha egy gulyás a mezőn heverve megszámolja a tehéncsorda lábait, akkor abból a tehenek számát 4-gyel való osztással kaphatja. Erre példa a későbbiekben a II. és a IV. alapfeladat.

5. Kisebb hasonló ("vagylagos") részfeladatokra visszavezetés (REKURZIÓ)

Ilyen módon oldjuk meg a későbbiekben a Fibonacci-számokra vezető feladatokat (LPV 4.1), de a későbbiekben a Pascal-háromszöget is származtathatjuk így.

Természetes a feladatmegoldást a legegyszerűbb **1.** ötlettel kezdeni. Ha ez nem jó, azt pl. úgy vesszük észre, hogy valamelyik döntésünk (tipikusan a legutolsó) nem "független" a korábbiaktól (pl. függ attól, hogy a "0" számjegyet felhasználtuk-e korábban, stb.). Azt is gyakran észrevehetjük, hogy bizonyos eseteket (tipikusan a többszörösen jó eseteket) többször is megkapjuk döntéseinknél. Ilyenkor gyorsan gondoljuk meg, hogy nem tudjuk-e **4.**-et alkalmazni, majd folytassuk **3.**-mal, majd **2.**-vel. Az **5.** ötlet akkor merül fel, ha a feladatot természetes először kisebb méretben megoldani, és a nagyobb eseteket erre visszavezetni.

ALAPFELADATOK

I. n különböző elem sorbarendezései (permutációi): az első helyre n-féle elem, a másodikra $(n-1)$-féle kerülhet, és így tovább. A lehetőségek száma független a korábbi döntésektől, így az **1.** alapján a sorbarendezések száma $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (LPV 1.6).

II. Van r különböző tárgy, az i-edik fajtából n_i darab. Ezek sorbarendezéseinek száma

$$\frac{(n_1+n_2+...+n_r)(n_1+n_2+...+n_r-1)(n_1+n_2+...+n_r-2)...3\cdot 2\cdot 1}{(n_1\cdot(n_1-1)...2\cdot 1)((n_2\cdot(n_2-1)...2\cdot 1)...(n_r\cdot(n_r-1)...2\cdot 1).}$$

Gondolatban különböztessük meg az azonos tárgyakat. Ekkor az előző alapfeladat alapján ezeknek $(n_1+n_2+...+n_r)(n_1+n_2+...+n_r-1)...2\cdot 1$ sorrendje van. Most a **4.** alapötletet alkalmazzuk. Minden megkülönböztetés nélküli sorrendet annyiszor számoltunk, ahányféleképpen az egymással megegyező tárgyak megkülönböztethetők. Ez az egyes tárgyakra egymástól függetlenül tehető meg, így megint csak az előző feladat alapján minden sorrendet annyiszor számoltunk, amennyi a fenti tört nevezője.

III. Hányféleképpen választhatunk ki n különböző tárgyból k-t úgy, hogy a sorrend is számít? Két eset van, ha minden tárgyat csak egyszer választhatunk, akkor a válasz **1.** alapján $n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)$ (tehát k tényezős a szorzat, hiszen k döntésünk van). Ha egy tárgy többször is szerepelhet, akkor minden döntésnél n lehetőségünk van, így a válasz n^k. (Például kártyacsomagból húzunk visszatevés nélkül, illetve visszatevéssel; különböző ajándékokat osztunk egy osztályban; stb.), ld. LPV 1.5, 1.7, ott az első esetet *rendezett részhalmaz*nak nevezzük, a másodikat *karaktersorozat*nak.

IV. Hányféleképpen választhatunk ki n különböző tárgyból k-t úgy, hogy a sorrend nem számít? Ha a tárgyak sorrendjét figyelembe vennénk, akkor az előző feladat szerint $n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1)$ lehetőség lenne. Ekkor minden k-ast annyiszor számoltunk meg, amennyiszer az adott k-as sorbarakható. Így a **4.** ötlet szerint a válasz $n\cdot(n-1)\cdot ... \cdot(n-k+1/(k(k-1)... \cdot 2\cdot 1)$ lesz. (Például kártyacsomagból húzunk egyszerre k lapot; azonos ajándékokat osztunk egy osztályban, de mindenki csak egyet kaphat; LOTTÓ szelvények kitöltése, stb.) Itt tehát az n elemű halmaz k elemű részhalmazait számoltuk meg, ld. LPV 1.8.

V. Hányféleképpen választhatunk ki n különböző tárgyból k-t úgy, hogy a sorrend nem számít, de egy tárgyat többször is választhatunk?

Ezt az alapfeladatot a *Pénzosztás* problémájára vezettük vissza. Az n tárgy helyett gondoljunk n gyerekre. Osszunk ki minden gyereknek annyi Ft-ot, ahányszor őt kiválasztottuk. Így n gyereknek k Ft-ot osztottunk ki. Ez $n-1$ db elválasztójel és k db egyforintos (karika) elhelyezését jelenti. Ezt a II. Alapfeladat (kétféle tárgy sorbarendezése) alapján $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$-féleképpen tehetjük meg. Az elhelyezést a IV. alapfeladatra is visszavezethetjük: összesen $n+k-1$ hely van, ezek közül választjuk ki azt a k-t ahová karikát írunk. Így a lehetőségek száma: $\binom{n+k-1}{k}$.

Az alapfeladatokra az alábbi elnevezések a szokásosak: sorbarendezés = permutáció, kiválasztás abban az esetben, ha a sorrend számít = variáció, kiválasztás abban az esetben, ha a sorrend nem számít = kombináció. Minden esetben az ismétléses jelzőt használjuk, ha azonos elemek megengedettek. Így például az V. alapfeladatot *ismétléses kombináció*nak nevezzük. Szokás az elnevezéseket magukra a sorrendekre illetve kiválasztásokra is használni, így pl. az a,a,b,b,b,c, elemek egy sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezni (a Sokszínű matematika 11 is ebben az értelemben használja ezeket).

ALAPVETŐ DEFINÍCIÓK, JELÖLÉSEK

Def. $n!$ jelöli az $1 \cdot 2 \cdot ...n$ szorzatot, ha $n \geq 1$ egész szám, $0!$-t pedig 1-nek definiáljuk. $\binom{n}{k}$ (n, k nemnegatív egészek) pedig az $n!/(k!(n-k)!)$ hányadost fogja jelölni. Az $n!$-t "n faktoriálisnak" olvassuk ki, az $\binom{n}{k}$ neve pedig binomiális együttható, kiolvasása "n alatt a k". Az $\binom{n}{k}$-t 0-nak definiáljuk, ha n nemnegatív egész, k pedig negatív, vagy n-nél nagyobb egész.

Ezek a jelölések egyszerűsítik az alapfeladatoknál látott képleteinket: az $n!$ az n elem sorbarakásainak (permutációinak) számát adja meg(**I.** alapfeladat); az $\binom{n}{k}$ azt mondja meg, hogy n különböző elemből hányféleképp lehet k-tagú csapatot kiválasztani (azaz a sorrendre nem vagyunk tekintettel, **IV.** alapfeladat). Máképpen $\binom{n}{k}$ az n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazainak száma. A **II.** alapfeladat megoldása mostani jelöléseinkkel: $(n_1 + \ldots + n_r)!/n_1! \ldots n_r!$. A **III.** alapfeladat első esetében a megoldások számát szintén felírhatjuk a mostani jelöléseinkkel: az $n!/(n-k)!$.

ALAPAZONOSSÁGOK (LPV 3.1, 3.5, 3.6)

A faktoriálisok és binomiális együtthatók legegyszerűbb azonosságai az alábbiak:

$(n+1)n! = (n+1)!$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

melyek a definícióból azonnal következnek. Igyekszünk a későbbiekben megmutatni, hogy hogyan lehet kombinatorikai feladatra való visszavezetéssel igazolni az azonosságokat.

Talán a legfontosabb azonosság az

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad (n, k \geq 1)$$

rekurzív összefüggés. A bal oldalon egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma szerepel. A jobb oldalon ezt két (vagylagos) részre bontottuk aszerint, hogy egy rögzített elem benne van-e a halmazban vagy sem.

Ezt az azonosságot ismételten alkalmazva kapjuk, hogy

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n+1}{2}+...+\binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m}{m}.$$

Ha ebben az azonosságban n helyett $n+1$-et, m helyett $(m-1)$-et írunk és felhasználjuk, hogy $\binom{n+m}{m-1}=\binom{n+m}{n+1}$, akkor a talán könnyebben megjegyezhető

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+m-1}{n}=\binom{n+m}{n+1}$$

öszefüggéshez jutunk. A kombinatorikus bizonyításhoz gondoljunk arra, hogy halmazunk az $\{1,2\ldots,n+m\}$ halmaz, amelynek $n+1$ elemű részhalmazait szeretnénk összeszámolni. Osszuk vagylagos részfeladatokba ezeket a részhalmazokat a bennük szereplő elemek legnagyobbika szerint. Ha ez a legnagyobb elem i, akkor az $1,2,\ldots,i-1$ elemek között kell legyen a részhalmaz n eleme. Mivel i az $n+1$ és $n+m$ között kell legyen, a bal oldalon éppen az ilyen részhalmazok számának összege szerepel.

HF***: Próbáljuk meg ennek segítségével levezetni a négyzetszámok ill. a köbszámok összegére vonatkozó zárt formulát!

Egy további, kulcsfontosságú összefüggés az algebrából ismert *binomiális tétel*, ld. LPV 3.1:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i},\ \ (n\geq 1).$$

Gondoljuk meg, hogy a bal oldal olyan n tényezős szorzat, amelyben minden tényező $(a+b)$. Ha itt a disztributivitás segítségével kifejtjük a szorzatot (minden tagot mindennel megszorzunk), akkor valóban a^ib^{n-i} alakú tagok keletkeznek. Egy ilyen tag a beszorzás után (de összevonás előtt) annyiszor szerepel, ahányféleképpen az n tényező közül kiválaszthatjuk azt az i darabot, amelyből a beszorzásnál az a tagot választjuk. Erre viszont az eddigiek alapján $\binom{n}{i}$ lehetőség van.

Ebből azonnal adódik néhány érdekes összefüggés, pl. $a=b=1$-re

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.$$

Kombinatorikus igazolása: a bal oldalon egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma van, a jobb oldalon ugyanezek a részhalmazok elemszámuk szerint csoportosítva.

Hasonlóan $a=1,b=2$ esetén

$$3^n=(1+2)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i.$$

HF: Keressünk ehhez kombinatorikus bizonyítást!

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i.$$

A kombinatorikus bizonyításhoz rendezzük át az egyenletet:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ...$$

A bal oldalon az n elemű halmaz páros elemszámú részhalmazainak száma, a jobbon a páratlan elemszámú részhalmazok száma szerepel. Ezekről viszont egymás utáni független döntésekkel láttuk, hogy számuk 2^{n-1}, azaz a bal és a jobb oldal egyaránt 2^{n-1}.

A binomiális együtthatókat szokás háromszög alakban felírni, ezt a háromszöget Pascal háromszögnek hívjuk. A sorok indexelése 0-tól kezdődik, a soron belül az elemeké is. Tehát a legfelső sorban egyetlen elem, a $\binom{0}{0} = 1$ áll, a második sorban két elem $\binom{1}{0}$ és $\binom{1}{1}$ és így tovább. A háromszög két szélén csupa egyes áll. Érdemes az eddigi azonosságokat a bennük szereplő elemek Pascal-háromszögbeli elhelyezkedésével is megjegyezni.