

# MINIMÁLIS KÉSGÜ FESZÍTŐ FA

TARJAN: **PIROS** - KÉK színezés

Def. Egy színezés megengedett, ha  $\exists$  feszítő fa (min. késgü), amely  $\forall$  **Kék** él tart, de nem tart. **Pirosat**

**KÉK** lépés: vegyünk egy olyan vágást, h. nincs benne **Kék** él. Ebben (egy) min. késgü szintelen él színezzük **Kék**re\*

**PIROS** lépés: vegyünk egy olyan kört, h. nincs benne **PIROS** él. Ebben (egy) max. késgü szintelen él színezzük **PIROS**ra.\*

Kezdetben  $\forall$  él szintelen (megengedett).

Áll. A fenti szabályokkal megengedett színezésből megengedettet kapunk.

Biz. 1) Ha a **KÉK** lépést alkalmazzuk. Volt egy fesz. fa:  $F$ , amely a **Kék** élleket tart, és **Pirosat** nem. Most az  $e$  él színezzük **Kék**re  $e \in F \vee e \notin F$ . Tek. azt a vágást, amit a **Kék** lépésben,  $F$ -nek van olyan  $f$  ele ami ebben a vágásban van és szintelen. Ekkor  $c(f) \geq c(e)$  a szabály miatt. Másrészt  $F - f + e$  fesz. fa és  $F$  min. késgü, így  $c(f) \leq c(e)$ . Tehát  $c(f) = c(e)$  és  $F - f + e$  is min. késgü

2) Ha a **PIROS** lépést alk. Volt egy  $F$  fesz. fa és most  $e - t$  színezzük **Pirosra**.  $e \notin F \vee e \in F$ : legyen  $C$  az a kör, ami miatt  $e$  **Piros** lesz.  $F - e$ : 2 komponensű.  $C$ -ben van olyan  $f$  él, ami a 2 komp. között megy  $\Rightarrow$  szintelen (mert  $F \forall$  **Kék** él tart.) Erre a **Piros** lépés miatt  $c(f) \leq c(e)$ . Másrészt  $F - e + f$  is fesz. fa, így  $c(e) \leq c(f)$ . Tehát  $c(f) = c(e)$  és  $F - e + f$  is min késgü.  $\square$

Áll. Amíg van szintelen él, amelyek lépést lehet alkalmazni.

Biz. **Kék** elekből nincs kör  $\rightarrow$  erdő, komp.-i fák. Ha a szintelen él egy komp. csúcsai között megy, **PIROS**-ra lehet színezni. Ha küll. komp.-k között, akkor  $S = az$  él egyik végpt-ját tart. komp. csúcsai,  $T$  a többi: vágás. Ebben nincs **Kék** él, van szintelen  $\Rightarrow$  amelyik szintelen élre **Kék** lépés alkalmazható.  $\square$

Ha  $\forall$  él **Kék** v. **Piros**, akkor  $\exists$  min. késgü fesz. fa, amely tart, a **Kék** élleket és nem tart. **Pirosat**  $\Rightarrow$  ebben  $\forall$  él **Kék**.

Mj. Megállhatunk, ha már van csúcsszám - 1 db **Kék** él.

\* Mindkét esetben csak a szintelen élk közül választjuk a MIN/MAX késgüt.  
 $\uparrow$  **Kék**  $\uparrow$  **Piros**