Véges matematika 1/XII. normál gyakorlat
Mintazárthelyi a 2. anyagrészhez

1. A lap alján jobbra látható gráfban a csúcsok városok (illetve egy az Északi-sark), az élek pedig légi folyosók. Igazoljuk, hogy a Mikulás az Északi-sarkról indulva nem tudja úgy kihordani az ajándékokat a városokba, hogy minden városban pontosan egyszer járjon, és munkája végeztével az utolsó városból közvetlenül hazarepüljön.

Megoldás: Ha meg tudná tenni, az azt jelentené, hogy a gráfban van Hamilton-kör; tehát a feladat szerint meg kell mutatnunk, hogy nincs. Ezt a csúcstörlős kritériummal tudjuk megtenni: Ha lenne a gráfban Hamilton-kör, akkor bármely k darab csúcs törlése esetén legfeljebb k darab komponensre eshet szét. Számozzuk a gráf csúcsait az óramutató járásával ellentétesen úgy, hogy az Északi-sark jobb oldali szomszédja legyen az 1., az Északi-sark a 2. stb.! A 3. és 6. sorszámú csúcsok törlésével 3 db komponensre esik szét a gráf, tehát nincs benne Hamilton-kör.

2. Egy egyszerű gráfnak egy híján minden fokszámát meg tudtam állapítani, ezek az alábbiak: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Mi lehet a hiányzó fokszám? (Ha egy értéket ki szeretnénk zárni, a Hakimi-algoritmus elakadását most nem szabad érvként használni.)

Megoldás: Jelölje a hiányzó fokszámot X. A gráf 8 csúcsú és egyszerű (nincs benne sem párhuzamos, sem hurokél), tehát $X \leq 7$. A páratlan csúcsú fokszámok száma páros kell, hogy legyen. Mivel az eddig ismert fokszámok között négy darab páratlan van, ezért X páros. Tehát X szóba jöhető értékei $6, 4, 2, 0$. $X = 6$ esetén: A gráf csúcsait osszuk szét kis és nagy fokúakra a következőképpen: legyenek a kis fokúak: $1, 2, 3, 4$, nagy fokúak: $5, 6, 6, 7$. Ekkor a nagy fokú csúcsokból kiindul a kis fokúak felé legalább $24 - 4 \cdot 3 = 12$ él, de a kis fokúak legfeljebb $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ élt tudnak befogadni; tehát nincs ilyen egyszerű gráf. $X = 2$ és $X = 0$ esetén: A kettéosztásnál legyenek mindkét esetben a nagy fokúak: $4, 5, 6, 7$, kis fokúak a többi. Ekkor a nagy fokú csúcsokból kiindul a kis fokúak felé legalább $22 - 4 \cdot 3 = 10$ él, de a kis fokúak $X = 2$ esetén legfeljebb $1 + 2 + 2 + 3 = 8$ élt, $X = 0$ esetén legfeljebb $1 + 2 + 3 = 6$ élt tudnak befogadni; tehát nincsenek ilyen egyszerű gráfok. $X = 4$ lehetséges, pl. a Hakimi-algoritmus lefuttatásával kaphatunk példát.

3. a) Rajzold föl azt a fát, melynek Prüfer-kódja $6, 6, 8, 4, 3, 3, 0, 0$.
b) Hány olyan számozott fa van, melynek fokszámsorozata tíz darab egyesből és négy darab négyesből áll?

Ötlet: **b)** A számozott fák száma megegyezik a Prüfer-kódok számával, tehát a kérdés úgy is föltehető, hogy hány Prüfer-kódot tudunk készíteni a fenti feltételekkel.

Megoldás: **a)** A kód végére 0-t írva, majd visszafejtve kapjuk: $\begin{matrix} 1, & 2, & 5, & 6, & 4, & 7, & 3, & 8, & 9 \\ 6, & 6, & 8, & 4, & 3, & 3, & 0, & 0, & 0 \end{matrix}$.
A lerajzolást lásd külön fájlban (mintazh2 fa.pdf).

b) A feladat szerint a fának 14 csúcsa van, melyek közül 10 levél, 4 pedig negyedfokú. A Prüfer-kódban minden csúcs (fokszám-1)-szer szerepel, vagyis az ilyen fák Prüfer-kódjában négyféle szám szerepel, mindegyik háromszor. (Innentől leszámlálás: kombináció és ismétléses permutáció.) Először kiválasztjuk, hogy a 14 sorszám (címke) közül melyik 4 fog szerepelni, ezt $\binom{14}{4}$-féleképpen tehetjük meg. Mind a négy sorszámból három darab van, ezeket $\frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!}$ - féleképpen rakhatjuk sorba. Összesítve $\binom{14}{4} \cdot \frac{12!}{(3!)^4}$-féle Prüfer-kódot tudunk készíteni, tehát ennyi, a feltételnek megfelelő számozott fa van.

4. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 100\}$, és egy i és egy j csúcs pontosan akkor legyen összekötve, ha $|i - j| \geq 19$. Mennyi $\chi(G)$?

Megoldás: Az $\{1, 20, 39, 58, 77, 96\}$ számok K_6-ot alkotnak, tehát legalább 6 színre szükségünk lesz G jó színezéséhez. Ennyi szín elég is: először színezzük ki az előbbi K_6-ot: 1-et az 1. színre, 20-at a 2. színre, …, 96-ot a 6. színre. Ekkor $\{2, \ldots, 18\}$ kaphatják az 1. színt, hiszen itt (1-gyel együtt) minden különbség kisebb, mint 19, azaz nem megy köztük él. Hasonlóan, $\{21, \ldots, 38\}$ színezhetők a 2. színnel; $\{40, \ldots, 57\}$ a 3. színnel; …; $\{97, \ldots, 100\}$ a 6. színnel. Tehát beláttuk, hogy 6 szín mindenképp kell, és mutattunk egy jó színezést 6 színnel, azaz $\chi(G) = 6$.

5. Mutasd meg, hogy bárhogyan próbáljuk lerajzolni a K_8-at a síkba, létrejön legalább 10 élkereszteződés!

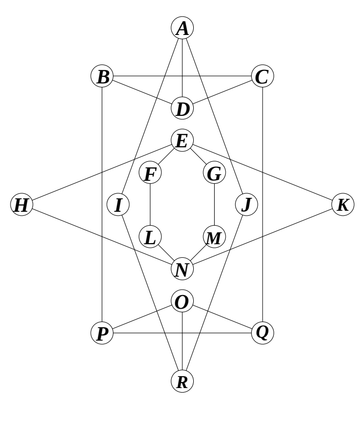
Megoldás: Vegyük K_8 tetszőleges lerajzolását. Vegyük ennek egy lehető legtöbb élt tartalmazó síkbarajzolt részgráfját! Ebben legfeljebb $3 \cdot 8 - 6 = 18$ él van; és a definíciója miatt minden egyes él, ami nincs ebben a részgráfban, keresztez legalább egy olyan élt, ami benne van. Mivel legalább $8 \cdot 7/2 - 18 = 10$ ilyen él van, legalább tíz élkereszteződésnek lennie kell az adott lerajzolásban.

6. Legkevesebb hány új élt kell behúzni ahhoz a lap alján, bal oldalon látható gráfba, hogy legyen benne Euler-vonal? Mutassunk is példát megfelelő élek behúzására!

Megoldás: **a)** Két összefüggőségi komponens van: az $\{A, B, C, D, I, J, O, P, Q, R\}$ csúcsok feszítette összefüggőségi komponensben nyolc páratlan fokú csúcs van; a másik komponensben csupa páros fokszámú. Csak két páratlan fokú csúcs maradhat és összefüggővé kell tenni a gráfot. Három él nem elegendő, mert azokat csupa páratlan fokú csúcs közé kellene húzni ahhoz, hogy hat csúcs fokának is megváltoztassák a paritását, viszont akkor még nem lesz összefüggő a gráf; négy él ellenben elegendő, pl. AB, PR, KC, QC.

7. A G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, és minden csúcs foka 55. Bizonyítsd be, hogy el lehet hagyni G-ből 50 élt úgy, hogy a megmaradt gráfban legyen zárt Euler-vonal.

Megoldás: Mivel minden csúcs fokszáma 50-nél nagyobb, ezért a Dirac-tétel szerint van a gráfban Hamilton-kör. Vegyünk egy Hamilton-kört, és töröljük ki minden második élét! Így éppen 50 élt hagytunk el. Ekkor minden csúcs fokszáma 1-gyel csökkent, 54 lett, azaz páros. Mivel továbbra is minden fokszám 50-nél nagyobb, ezért az új gráfban is van Hamilton-kör, azaz az új gráf is összefüggő. A kapott gráfban tehát minden csúcs fokszáma páros, és összefüggő, így van benne Euler-körvonal.



Északi−sark