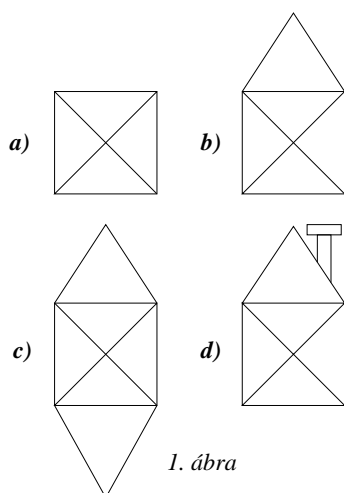
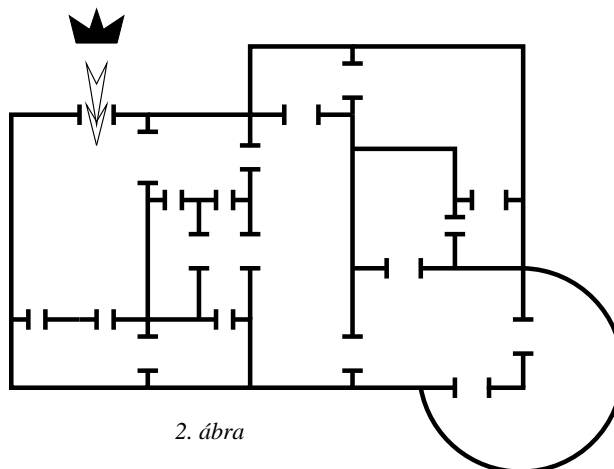


Véges matematika 1/VII. normál gyakorlat

1. Van-e olyan gráf (nem feltétlenül egyszerű), melyben a pontok foka **a)** 11, 3, 3, 3, 3; **b)** 11, 3, 3, 3?
2. Van-e olyan hurokél nélküli gráf, melyben a pontok foka **a)** 12, 3, 3, 2, 2; **b)** 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2?
3. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok foka
a) 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1; **b)** 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1; **c)** 5, 2, 2, 2, 1;
d) 5, 5, 2, 2, 1, 1; **e)** 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2?
4. Egy egyszerű gráf fokszámsorozata 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, x, x . A 3, 4, 5 értékek közül melyik(ek) lehet(nek) x helyén? (E feladatnál a Hakimi-algoritmus elakadását nem szabad érvként használni.)
5. **a)** Az 1. ábra képei közül melyeket lehet lerajzolni egy vonallal? És amit nem lehet, ott legkevesebb hányszor kell felemelni a ceruzánkat? Általánosítsd az észrevételt!
b) A 2. ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Minden reggel a király belép a nyíllal jelölt bejáraton, majd úgy sétál a szobák közt, hogy minden ajtón pontosan egyszer megy át. Sétája végén leül a trónteremben és fogadja a látogatóit. Melyik terem a trónterem? Indokold is meg!



1. ábra



2. ábra

6. Milyen irányú implikáció áll fenn az alábbi állítások között?

a) G -ben minden csúcs foka páros	?	?	G -ben van zárt Euler-vonal
b) G -ben minden csúcs foka páros és G öf.	?	?	G -ben van zárt Euler-vonal
c) G -ben minden csúcs foka páros	?	?	G öf. és G -ben van zárt Euler-vonal
d) G -ben minden csúcs foka páros és G öf.	?	?	G öf. és G -ben van zárt Euler-vonal

7. Az alábbi gráfok közül melyekben van (nyílt vagy zárt) Euler-vonal?

- a) $V_1 = \{1, 2, \dots, 102\}$, $E_1 = \{\{i, j\} \subset V_1 : 1 \leq |i - j| \leq 2\}$, $G_1 = (V_1, E_1)$;
- b) $V_2 = \{1, 2, \dots, 102\}$, $E_2 = \{\{i, j\} \subset V_2 : 1 \leq |i - j| \leq 3\}$, $G_2 = (V_2, E_2)$;
- c) $H = \{1, 2, \dots, 10\}$, $V_3 = \{A \subset H : |A| = 3\}$, $E_3 = \{\{A, B\} \subset V_3 : A \cap B \neq \emptyset\}$, $G_3 = (V_3, E_3)$.

8. Egy 60 csúcsú összefüggő gráf minden pontjának foka 4. Mutassuk meg, hogy élei kiszínezhetők pirossal és kézzel úgy, hogy minden csúcsba két piros és két kék él fusson! És ha nem összefüggő?

9. Mutass olyan négy, öt, illetve hat csúcsú egyszerű gráfot, ami izomorf a komplementerével! (Egy egyszerű G gráf komplementere az a gráf, melynek csúcsai G csúcsai, és két (különböző) csúcsot pontosan akkor köt össze él, ha G -ben nincs köztük él.)

10. Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf, melyben minden pont foka legalább $(n - 1)/2$. Mutassuk meg, hogy G összefüggő! Mutassunk ellenpéldát nem egyszerű G esetén!

11. Mutassuk meg, hogy ha egy véges egyszerű gráf minden pontjának foka legalább k , akkor a gráfban van olyan kör, mely legalább $k + 1$ csúcsot tartalmaz!

HF1. Mondd ki a Hamilton-körökre vonatkozó Dirac-tételt! (2 pont)

HF2. Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf, melyben bármely két nem szomszédos pont fokszámának összege legalább $n - 1$. Mutassuk meg, hogy G összefüggő. És ha G nem egyszerű? (4 pont)

HF3. Melyik az a legnagyobb X szám, melyre az $8, 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 1, X$ számsorozat realizálható egy egyszerű gráf fokszámsorozataként? (Számsorozatok kizárásához ne használd indoklásként a Hakimi-algoritmus elakadását.) (4 pont)