# Véges matematika 1/V. normál gyakorlat
# Mintazárthelyi az 1. anyagrészhez

Minden megoldást indoklással kell alátámasztani. Az előadáson és a gyakorlaton elhangzott állításokra szabad hivatkozni azok pontos megfogalmazása után, másra nem. Semmilyen segédeszköz nem használható, számológép sem. Minden feladat megoldása tíz pontot ér. Egy lapra több feladat megoldása is írható.

**1.** Hány olyan harminc hosszúságú kockadobás-sorozat van, melyben
**a)** pontosan nyolc darab hatos és legalább egy kettes van?
**b)** páros szám után nem állhat közvetlenül páratlan? (Páratlan után állhat páros.)

*Megoldás:* **a)** Először kiválasztjuk a 8 darab hatos helyét, ezt $\binom{30}{8}$-féleképpen tehetjük meg. A maradék 22 helyre az $1, \ldots, 5$ számok kerülhetnek. Dobjuk ki a rosszat: összesen $5^{22}$-féle lehet a 22 hely kitöltése; ezekből rossz, ha nem szerepel kettes, azaz minden helyen csak négyféle szám közül választunk, ezt $4^{22}$-féleképpen tehetjük meg. A hatosok helyének kiválasztása és a többi 22 hely kitöltéseinek száma egymástól független, ezért szorzunk, a megoldás tehát $\binom{30}{8} \cdot (5^{22} - 4^{22})$.
**b)** Ha a sorozatban van valahol páros szám, akkor onnantól kezdve csak páros számok állhatnak. Esetszétválasztás aszerint, hogy az első páros szám a sorozat hányadik helyén áll: Ha a $k$. helyen, akkor az őt megelőző $k-1$ hely mindegyikére a három páratlan szám valamelyike kerülhet, ez $3^{k-1}$ lehetőség; a $k$. helytől kezdve minden helyre a három páros szám valamelyike kerülhet, ez $3^{30-(k-1)}$ lehetőség; ezek függetlenek, ezért szorzunk: $3^{k-1} \cdot 3^{30-(k-1)} = 3^{30}$ minden $k$-ra. Az esetszétválasztásnak megfelelően ezt $k$ lehetséges értékeire össze kell adni, $k = 0, 1, \ldots, 30$ (ahol k=0 azt jelenti, hogy a sorozatban minden szám páratlan), azaz $31 \cdot 3^{30}$.

**2.** A MISSISSIPPI szó anagrammáit tanulmányozom. Mindegyikre megnézem, hogy egymás melletti S betűkből mi a leghosszabb előforduló sorozat. Hány olyan anagramma van, melyre ez az érték pontosan három?

*Megoldás:* Három darab S-t összeragasztunk, így összesen 9 betűt kell sorbaraknunk úgy, hogy a negyedik S nem állhat az összeragasztottak mellett. Először az S-ek elhelyezéseit számoljuk össze esetszétválasztással aszerint, hogy az összeragasztott hol áll: 1. Ha az első vagy utolsó helyen, a negyedik S hétféle helyen állhat, 2. ha a 2-8. helyek valamelyikén, akkor a negyedik hatféle helyen. Ez $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6$ lehetőség. A többi betű elhelyezéseinek száma ismétléses permutációval: a megmaradt 7 helyre kell sorbarakni négy I, kettő P és egy M betűt, ez $\frac{7!}{4! \cdot 2!}$-féleképpen lehetséges. A S-ek helyének kiválasztása és a többi betű sorbarakásainak száma egymástól független, ezért szorzunk, a megoldás tehát $(2 \cdot 7 + 7 \cdot 6) \cdot \frac{7!}{4! \cdot 2!}$.

**3.** Van 7 darab különböző dobozom és 17 pár cipőm. Hányféleképpen oszthatom szét a cipőket a dobozokba (minden cipőt el akarok rakni; egy dobozba bármennyi belefér), ha...
**a)** a cipők mind különbözők (azaz nincs két egyforma pár), és az összetartozó jobb- / ballábas cipőket ugyanazon dobozba teszem?
**b)** a cipők mind egyformák (azaz bármely két pár egyforma), de nem figyelek arra, hogy a jobb- / ballábas cipők párban legyenek?

*Megoldás:* **a)** Cipőpáronként döntünk, hogy melyik dobozba kerüljön, mindnél 7 lehetőségünk van, tehát $7^{17}$.
**b)** A jobb- és ballábas cipők természetesen különböznek egymástól, azaz azt kell megmondanunk, hogy melyik dobozba mennyi ballábas és mennyi jobblábas cipő került. A 17 egyforma ballábas cipő 7 doboz közti kiosztásainak számát a gombóc-pálcika módszerrel megkapjuk: 17 gombóc, $7-1$ pálcika, azaz $\binom{23}{17}$. Jobblábasokra függetlenül ugyanígy, tehát $\binom{23}{17}^2$.

**4.** A Lucas számokat a következő módon definiáljuk: $L_1 = 1, L_2 = 3$ és $n > 2$ esetén $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Bizonyítsd be, hogy $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ tetszőleges $n > 0$ egész esetén.

*Megoldás:* Teljes indukció. Kezdeti értékre: $L_1 = F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1$ teljesül, illetve $L_2 = F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3$ teljesül. (Elég egyet mutatni.)
Tegyük fel, hogy valamilyen $n$ értékig $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, ez az indukciós feltevés. Indukciós lépés: megmutatjuk, hogy $n + 1$-re is teljesül, azaz belátjuk, hogy $L_{n+1} = F_{n+2} + F_n$.
$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1} + F_n + F_{n-2} = F_{n+1} + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} = (F_{n+1} + F_n) + (F_{n-1} + F_{n-2}) = F_{n+2} + F_n$ és épp ezt akartuk belátni. Az első egyenlőség a Lucas-számok definíciója, a második az indukciós feltevés, a harmadik és negyedik csak egy átrendezés és zárójelezés, az ötödik a Fibonacci-számok definíciója.

**5.** Egy 30 centi hosszú mákosbejglit sütök, amibe pontszerűnek tekintett mazsolát is szórok (véletlenszerűen). Legkevesebb hány szem mazsola esetén lesz bizonyosan olyan 2 centis szelet, melybe legalább négy mazsola jut?

*Megoldás:* Felosztjuk a bejglit 15 darab 2 centis szeletre, ezek lesznek a skatulyák. Skatulyaelv: ha $n$ skatulyába legalább $n \cdot k + 1$ dolgot teszünk, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, melybe legalább $k + 1$ dolog kerül. Itt most: a skatulyák a szeletek, $n = 15$; a dolgok a mazsolák, $k + 1 = 4$. Tehát $k = 3$, $n \cdot k + 1 = 15 \cdot 3 + 1 = 46$. Azaz 46 szem mazsola esetén biztosan lesz olyan szelet, melybe legalább 4 mazsola jut. Ezzel még nem vagyunk kész: meg kell mutatni, hogy kevesebb nem elég. Valóban: 45 szem mazsola esetén előfordulhat, hogy mind a 15 szeletbe pontosan 3 szem mazsola jutott.

**6.** A Mikulásnak van ötféle csokija, mindből hét darab. Ezeket (mindet) szeretné kiosztani huszonöt gyereknek úgy, hogy mindenki kapjon legalább egy csokit, de senki ne kapjon két egyformát. Hányféleképpen oszthatja ki a csokikat?

*Megoldás:* Csokifajtánként nézzük: azt, hogy senki ne kapjon két egyformát, úgy garantáljuk, hogy egy adott fajtánál a 25 gyerekből kiválasztunk 7-et, akik abból a fajtából kapnak egy-egy darabot. Ez tehát fajtánként $\binom{25}{7}$. A különböző fajtákra ezt függetlenül elvégezzük, vagyis össze kell szorozni; az összes eset tehát $\binom{25}{7}^5$.
Rossz eset az, ha valamelyik gyerek nem kap semmit, vagyis sokféle rossz eset van, aszerint, hogy éppen ki vagy kik nem kaptak. Ezért szitaformulával tudjuk megoldani a feladatot.
$H = \{$ összes eset $\}$, $|H| = \binom{25}{7}^5$.
$A_i = \{$ az $i$. gyerek nem kap semmit $\}$, $|A_i| = \binom{24}{7}^5$ (mert ez azt jelenti, hogy minden csokifajtánál 24 gyerek közül választott a Mikulás), $i = 1, ...25$
$A_i \cap A_j = \{$ az $i$. és a $j$. gyerek nem kap semmit $\}$, $|A_i \cap A_j| = \binom{23}{7}^5$ (mert ez azt jelenti, hogy minden csokifajtánál 23 gyerek közül választott a Mikulás), ilyen kettes metszetből $\binom{25}{2}$ van.
Stb.
Az utolsó értelmes (nemnulla) metszetek a 18-as metszetek, azaz ha 18 gyerek nem kap csokit, mert így 7 gyerek marad, akik között a fajtánként 7 darabot kiosztjuk. A 18-nál több részhalmaz metszetei üresek (emiatt mindegy, hogy beleírjuk-e a szummába).
Összesen tehát $|H \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{25})| = \binom{25}{7}^5 - 25 \cdot \binom{24}{7}^5 + \binom{25}{2}\binom{23}{7}^5 - \ldots + \ldots + \binom{25}{18}\binom{7}{7}^5 =$
$= \sum_{k=0}^{25}(-1)^k \binom{25}{k}\binom{25-k}{7}^5$.

**7.** Mutasd meg, hogy

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^n.$$

*Megoldás:* Megmutatjuk, hogy mindkét oldal ugyanazt számolja meg: hányféleképpen helyezhetünk el $n$ szál különböző virágot $n$ különböző színű vázába, ha egyik vázát sem hagyhatjuk üresen? Bal oldal: ez valójában $n$ különböző elem sorbarakásainak száma„ minden vázába pontosan egy virág jut. Jobb oldal: szitaformulával. Alaphalmaz: $H = \{$összes szétosztás$\}$, rossz részhalmazok: $A_i = \{$az i. vázába nem jut virág $\}$, $i = 1, \ldots, n$. $|H| = n^n$ (minden szálról egyesével eldöntjük, hogy melyik vázába tesszük), $k$ darab rossz részhalmaz metszetének mérete $(n-k)^n$ (minden szálról egyesével eldöntjük, hogy melyik vázába tesszük, de most $k$ darab váza üresen marad, tehát csak $n-k$ váza közül választunk). A szitaformula felírása éppen a jobb oldalon álló képletet adja.