

Véges matematika 1/V. normál gyakorlat Mintazárthelyi az 1. anyagrészhez

Minden megoldást indoklással kell alátámasztani. Az előadáson és a gyakorlaton elhangzott állításokra szabad hivatkozni azok pontos megfogalmazása után, másra nem. Semmilyen segédeszköz nem használható, számológép sem. Minden feladat megoldása tíz pontot ér. Egy lapra több feladat megoldása is írható.

- Hány olyan harminc hosszúságú kockadobás-sorozat van, melyben
 - pontosan nyolc darab hatos és legalább egy kettes van?
 - páros szám után nem állhat közvetlenül páratlan? (Páratlan után állhat páros.)
- A MISSISSIPPI szó anagrammáit tanulmányozom. Mindegyikre megnézem, hogy egymás melletti S betűkből mi a leghosszabb előforduló sorozat. Hány olyan anagramma van, melyre ez az érték pontosan három?
- Van 7 darab különböző dobozom és 17 pár cipőm. Hányféleképpen oszthatom szét a cipőket a dobozokba (minden cipőt el akarok rakni; egy dobozba bármennyi belefér), ha...
 - a cipők mind különbözők (azaz nincs két egyforma pár), és az összetartozó jobb- / ballábás cipőket ugyanazon dobozba teszem?
 - a cipők mind egyformák (azaz bármely két pár egyforma), de nem figyelek arra, hogy a jobb- / ballábás cipők párban legyenek?
- A Lucas számokat a következő módon definiáljuk: $L_1 = 1, L_2 = 3$ és $n > 2$ esetén $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Bizonyítsd be, hogy $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ tetszőleges $n > 0$ egész esetén.
- Egy 30 centi hosszú mákosbejglit sütök, amibe pontszerűnek tekintett mazsolát is szórok (véletlenszerűen). Legkevesebb hány szem mazsola esetén lesz bizonyosan olyan 2 centis szelet, melybe legalább négy mazsola jut?
- A Mikulásnak van ötféle csokija, mindből hét darab. Ezeket (mindet) szeretné kiosztani huszonöt gyereknek úgy, hogy mindenki kapjon legalább egy csokit, de senki ne kapjon két egyformát. Hányféleképpen oszthatja ki a csokikat?
- Mutasd meg, hogy

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n.$$