Gráfok színezése

Ebben a részben az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nincsenek a gráfban hurokélek.

Definíció. A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy színezése *jó színezés*, ha éllel összekötött csúcsok különböző színűek. A jó színezéshez szükséges színek *minimális* számát $\chi(G)$ jelöli, ezt *kromatikus számnak* nevezzük.

Azok a gráfok, amelyekre $\chi(G) = 1$, pontosan a csupa izolált csúcsból álló gráfok.

A megfelelő fogalmak élhalmazokra az alábbiak.

Definíció. A $G = (V, E)$ gráf éleinek egy színezése *jó színezés*, ha egy csúcsból kiinduló élek különböző színűek. A jó élszínezéshez szükséges színek *minimális* számát $\chi'(G)$ jelöli, ezt *élkromatikus számnak* nevezzük.

Néhány egyszerű példa: az r csúcsú teljes gráfra (K_r-re) $\chi(K_r) = r$, hisz minden csúcsot különböző színre kell színezni. Ha F fa (és legalább 2 csúcsú), akkor ezt emeletenként színezve látjuk, hogy $\chi(F) = 2$. Ha $G = C_n$ az n hosszú kör, akkor ha n páros, úgy a csúcsokat felváltva színezhetjük két színnel, így $\chi(C_n) = 2$, ha n páros. Ha n páratlan, akkor nem lehet két színnel megszínezni jól a csúcsokat, 3 színnel viszont igen, így $\chi(C_n) = 3$, ha n páratlan. Már ezek a kérdések is bonyolultabbak jó élszínezésekre, a kör esetén $\chi'(C_n) = 2$, ha n páros, $\chi'(C_n) = 3$, ha n páratlan, mint a csúcs-színezésekre. Ugyanakkor a teljes gráf élkromatikus számát nem könnyű megadni, $\chi'(K_r) = r - 1$, ha r páros, $\chi'(K_r) = r$, ha r páratlan.

Milyen alsó, ill. felső becsléseket mondhatunk a kromatikus és az élkromatikus számra? Nyilvánvaló az alábbi

Állítás. Ha H részgráfja G-nek, akkor $\chi(H) \leq \chi(G)$ és $\chi'(H) \leq \chi'(G)$.

Ennek alapján a kromatikus számot kapcsolatba hozhatjuk a gráfban található legnagyobb teljes részgráf méretével. Ha ez r, akkor a kromatikus szám legalább r. (Hasonló dolgok mondhatók az élkromatikus számra.) Ugyanígy kapjuk, hogy ha G-ben van páratlan hosszú kör, akkor kromatikus (és élkromatikus) száma legalább 3. Ez a következő eredményhez vezet.

Állítás. Egy gráfra $\chi(G) \leq 2$ akkor és csak akkor, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

Az ilyen gráfokat *páros gráfoknak* nevezik, a fenti állítás ezek leírását adja. Speciálisan, mivel fa semmilyen kört nem tartalmaz, így fa kromatikus száma legfeljebb 2. (Amúgy ez 1, ha a fa 1 csúcsú.) A régebbi irodalomban azon gráfokat, amelyekben nincs páratlan kör, *páros körüljárású* gráfoknak nevezték.

Ugyanakkor fontos megjegyezni, hogy nagy teljes részgráf **nem kell létezzen** ahhoz, hogy a kromatikus szám nagy legyen, Mycielski konstruált olyan gráfokat, amelyekben nincs K_3, de kromatikus számuk akármilyen nagy lehet.

Végül még egy olyan (gráf)paraméter, amellyek a kromatikus és élkromatikus szám kapcsolatba hozható. Legyen Δ a legnagyobb fokú csúcs fokszáma. Erre a "mohó színezéssel" az alábbit mutatjuk meg.

Állítás. $\chi \leq \Delta + 1$.

Ha egymás után színezzük a csúcsokat, akkor minden lépésben a megszínezendő csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van, így mindig marad (a $\Delta+1$-ből) olyan szín, amelyre a csúcsot színezhetjük.

Ugyanakkor az **nem igaz**, hogy ha nagy a Δ maximális fokszám, akkor χ nagy lenne, gondoljunk a csillagra. Mind a teljes gráfok, mind a páratlan körök mutatják, hogy itt lehet $\chi = \Delta + 1$. Lényegében ezen kívül máskor nem is.

Brooks tétele. Ha G összefüggő (és $\Delta \geq 2$), továbbá $\chi = \Delta+1$, akkor G teljes gráf vagy páratlan kör.

A zárójelben szereplő feltétel nem is kell, mert $\Delta = 0, 1$-re G az 1 ill. 2 csúcsú teljes gráf.

Brooks tételét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha G összefüggő (és $\Delta \geq 2$), G nem teljes gráf és nem páratlan hosszú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta$.

Az élkromatikus számra a fentieknél pontosabb összefüggés adható a maximális fokszámmal. Mivel egy csúcsból kiinduló élek különböző színuek kell legyenek, így azonnal kapjuk, hogy $\chi' \geq \Delta$. Shannon belátta, hogy $\chi' \leq \frac{3}{2}\Delta$, még akkor is, ha G-ben lehetnek többszörös élek. Ha G 3 csúcsú és minden két csúcs között két párhuzamos él van, akkor mind a 6 élt különböző színre kell festenünk. Így $\chi' = 6$, $\Delta = 4$ ebben az esetben. Ha G egyszerű gráf, akkor még több igaz.

Vizing tétele. Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi' \leq \Delta + 1$.

A fenti alsó becsléssel összevetve tehát egyszerű gráfokra χ' vagy Δ vagy $\Delta+1$. Azonban ennek eldöntése általában algoritmikusan igen nehéz.