Síkbarajzolható gráfok

Definíció. A $G = (V, E)$ gráf síkba van rajzolva, ha élei nem metszik egymást (kivéve, ha közös csúcsuk van). Röviden a síkbarajzolt gráfokat síkgráfoknak mondjuk. A gráf *síkbarajzolható*, ha van ilyen élmetszés nélküli lerajzolása.

K_4 síkbarajzolható, mert tekinthetjük a tetraéder vetületének. Általában a K_r teljes gráfokról meg fogjuk mutatni, hogy $r \leq 4$-re síkbarajzolhatók, $r \geq 5$-re nem. A síkbarajzoláskor az élek és csúcsok mellett *tartományok* is keletkeznek. Nevezetes tény (de nehéz belátni), hogy ha egy gráf síkbarajzolható, akkor úgy is le lehet rajzolni, hogy az élek (a megfelelő csúcsok közti) egyenes szakaszok.

Euler-formula. Ha G összefüggő síkgráf, akkor $c + t = e + 2$, ahol c a csúcsok, e az élek, t a tartományok száma.

Ezt a gátak lerombolásával láttuk, be, jegyezzük meg, hogy ha G fa, akkor $t = 1$, $e = c - 1$ (erre vezettük vissza az általános esetet). Az előfordulhat, hogy egy gráfnak több különböző síkbarajzolása van, az Euler-formula azt garantálja, hogy ezekben ugyanannyi tartomány keletkezik. Az Euler formula segítségével becslést adhatunk síkbarajzolható gráf élszámára.

Állítás. Ha G egyszerű összefüggő síkgráf és $c \geq 3$, akkor $e \leq 3c - 6$. Ha G páros síkgráf, akkor $e \leq 2c - 4$.

Ennek alapján indokolhatjuk meg azt, hogy K_5 és $K_{3,3}$ nem rajzolható síkba. Az első esetlen $c = 5$, $e = 10$, azaz nem igaz, hogy $e \leq 3c - 6 = 9$. $K_{3,3}$ páros gráf, így az $e \leq 2c - 4$-nek kellene teljesülnie, de $c = 6$, $e = 9$. Érdemes meggondolni, hogy hasonló módon hogyan indokolhatnánk azt, hogy a Petersen gráf nem rajzolható síkba.

A síkbarajzolhatóságra szk̈séges és elégséges feltételt ad Kuratowski tétele. Egy gráf továbbosztásának nevezünk egy olyan gráfot amely élek úttal való helyettesítésével keletkezik belőle. Fontos, hogy ezen utak csúcsai (a végpontokat kivéve) új csúcsok, és különböző utak esetén ezen új csúcsok különbözőek. (Ez azt mondja, hogy nem csinálhatjuk meg, hogy két metsző él közös pontját nevezzük új csúcsnak mindkét élt továbbosztva egy-egy 2 hosszú úttá, mert a két úton szereplő csúcsok nem lehetnek azonosak.)

Kuratowski tétele. Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható síkba, ha nem tartalmazza részgráfként sem K_5, sem $K_{3,3}$ továbbosztását.

Ezen a módon is láthatjuk, hogy a Petersen-gráf nem rajzolható síkba, mert megtalálhatjuk benne $K_{3,3}$ egy továbbosztását.

A síkgráfokkal kapcsolatbanaz egyik legkorábbi probléma térképek tartományainak színezése volt. Egy ilyen színezés jó, ha két szomsz'edos (azaz közös éllel rendelkező) tartomány különböző színű. Ezt a kérdést visszavezethetjük síkgráfok csúcs-színezésére. Vegyünk fel egy pontot minden tartományban. Ezek lesznek a *duális gráf* csúcsai. Két ilyen csúcsot kössünk össze éllel, ha a megfelelő tartományok az eredeti gráfban él mentén találkozzanak. (Igazából elképzelhető, hogy két tartománynak több közös határoló éle van, azaz a duális gráfban többszörös élek vannak, de a színezések szempontjából ez nem releváns. Hasonlóan a duális gráfban a tartományokba benyúló “mólószerű” részekből (többszörös) hurokélek keletkeznének, az ilyen éleket a színezés szempontjából azonban az eredeti gráfból elhagyhattuk volna.) Ezen a módon tehát az eredeti síkgráf tartományainak egy jó színezése a duális gráf csúcsainak jó színezésének felel meg, és megfordítva. Így tartományok színezése helyett síkgráfok kromatikus számáról fogunk beszélni.

Állítás (hatszíntétel). Minden G síkgrafra $\chi \leq 6$.

Az esetleges többszörös éleket felejtsük el, mert azok nem befolyásolják a színezést. A bizonyításhoz jegyezzük meg az alábbi lemmát.

Lemma. Minden egyszerű síkgráfban van olyan csúcs, amelynek foka legfeljebb 5.

Ha nem lenne ilyen csúcs, akkor az élek száma legalább $(c \cdot 6)/2$ lenne, ami a fenti $3c - 6$-os felső becslésnek ellentmond.

A hatszíntételt a Lemma felhasználásával a csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ha $c = 1, 2$ Ha v egy legfeljebb 5 fokú csúcs, akkor $G - v$ eggyel kevesebb csúcsú, mint az eredeti gráf, így az indukció feltevés szerint kiszínezhető 6 színnel. Visszatéve v-t, már csak ezt a v csúcsot kell kiszíneznünk. Mivel v-nek legfeljebb 5 szomszédja van, de 6 színt használhatunk, biztosan lesz olyan szín, amelyre v-t kiszínezhetjük.

Négyszíntétel (Appel és Haken). Síkgráfra $\chi \leq 4$.

A probléma történetérő és általában a részletesebb bizonyításról a Lovász–Pelikán–Veszetrgombi féle könyvben olvashatunk (ahol az ötszíntétel bizonyítása is megtalálható).