Ramsey tétele(i) gráfokra

A témakör a szociológusok alábbi észrevételének általánosítása: legalább hat tagú társaságban vagy van háromfős klikk, vagy van háromfős antiklikk. Itt klikk olyan emberek halmazát jelöli, akik kölcsönösen kedvelik, antiklikk pedig olyanokét, akik kölcsönösen nem kedvelik egymást. Ramsey tételei azt mondják, hogy itt a klikk és antiklikk mérete tetszőlegesen megadható, ha a társaság elég sok emberből áll.

Ramsey tétele két színre. *Minden $k, \ell \geq 2$-re van olyan n, hogy egy legalább n csúcsú teljes gráf éleit két színnel színezve vagy lesz k olyan csúcs, amelyek közti minden él piros, vagy lesz ℓ olyan csúcs, amelyek közti minden él kék. Ha a legkisebb ilyen n-et $R(k, \ell)$ jelöli, akkor $R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$, ha $k, \ell \geq 3$.*

Bizonyítás. Elég az állítás második részét bizonyítani, mert abból n létezése már következik. Triviális, hogy $R(2, \ell) = \ell$, és $R(k, 2) = k$, bármely $k, \ell \geq 2$-re. A második részt használva ezekből tetszőleges k, ℓ-hez eljuthatunk. (Formálisan ez egy teljes indukció $k+\ell$, $k, \ell \geq 2$ szerint.)

Legyen $n_1 = R(k-1, \ell)$, $n_2 = R(k, \ell-1)$. Azt kell megmutatnunk, hogy az $n_1 + n_2$ csúcsú teljes gráf éleit *tetszőlegesen* színezve pirosra és kékre vagy lesz k olyan csúcs, amelyek minden összekötő éle piros vagy lesz ℓ olyan csúcs, amelyek minden összekötő éle kék. (Ezt röviden piros teljes k-asnak, illetve kék teljes ℓ-esnek fogjuk mondani.) Indirekte tegyük fel, hogy az $n_1 + n_2$ csúcsú gráfban nincs se teljes piros k-as, se teljes kék ℓ-es.

Vegyünk ki egy P csúcsot. Tekintsük azokat a csúcsokat, amelyek P-vel piros éllel vannak összekötve. Ezek között a pontok között nem lehet $k-1$ olyan, amelyek páronként piros éllel vannak összekötve, mert akkor P-vel együtt teljes piros k-ast kapnánk a gráfban. Persze ez a rész sem tartalmazhat kék teljes ℓ-est. Így ez a rész legfeljebb $n_1 - 1$ pontot tartalmazhat. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy a P-vel kék éllel összekötött pontok száma legfeljebb $n_2 - 1$. Így P-n kívül legfeljebb $n_1 + n_2 - 2$ pont lehetne, márpedig a csúcsok száma $n_1 + n_2$ volt. Ez ellentmondás, azaz valóban $n_1 + n_2 \geq R(k, \ell)$.

∎

Más megfogalmazás. *Minden $k, \ell \geq 2$-re van olyan n, hogy egy legalább n csúcsú egyszerű G gráfban vagy van k olyan pont, amelyek közül bármely kettő össze van kötve, vagy van ℓ olyan pont, amelyek közül semelyik kettő nincs összekötve. A legkisebb ilyen n a fenti $R(k, \ell)$.*

Valóban, a G éleit pirosra, komplementerének éleit kékre festve ez éppen az előző tétel. A tételbeli rekurzióból a triviális $R(2, \ell) = \ell$ és $R(k, 2) = k$ összefüggéseket használva $R(3, 3) \leq 6$ jön (hisz $R(2, 3) = R(3, 2) = 3$). Ezt felhasználva $R(3, 3) \leq 6$ és $R(4, 2) = 4$ miatt $R(4, 3) \leq 10$, és így folytathatnánk tovább. A gyakorlaton ezt javítjuk $R(4, 3) \leq 9$-re.

Felírva az előző tételből közvetlenül kapott értékeket n-re, észrevehetjük, hogy ezek a Pascal-háromszög elemei. Ez magyarázza a következő állítást.

Állítás. Minden $k, \ell \geq 2$-re
$$R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Bizonyítás. Abban az esetben, ha $k = 2$ vagy $\ell = 2$, a felső becslésbeli binomiális együttható k illetve ℓ, az állítás pedig triviálisan igaz, mint azt a korábbi tétel bizonyításának elején megjegyeztük. Ezután $k+\ell$ szerinti indukciót alkalmazva, az indukciós feltétel miatt feltehetjük, hogy
$$\binom{k+\ell-3}{k-1} \geq R(k, \ell-1), \text{ és } \binom{k+\ell-3}{k-2} \geq R(k-1, \ell).$$
A Pascal-háromszög képzési szabálya miatt a két binomiális együttható összege éppen
$$\binom{k+\ell-2}{k-1},$$
amit bizonyítani akartunk. ∎

Példa. Egy társaságban $\binom{k+1}{2}$ ember van. Bármely három ember között van két olyan, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy van k olyan ember, akik mindannyian ismerik egymást.

Az előző felső becslés szerint $R(k, 3) \leq \binom{k+1}{2}$. Színezzük pirosra azokat az éleket, amelyek végpontjai ismerősök, kékre azokat, amelyeknél nem. A feltétel éppen az, hogy gráfunkban nincs kék háromszög. Így viszont Ramsey tétele miatt van teljes piros k-as, ami pont k olyan embert jelent, akik mindannyian ismerik egymást.

Megjegyzés. Abban az esetben, ha $k = \ell$, a $\binom{2k-1}{k-1}$ nagyon durván 2^{2k} nagyságrendű. Természetes a kérdés, hogy $R(k, k)$ legalább mekkora kell legyen. Erről Erdős Pál megmutatta, hogy $n \geq 2^{k/2}$. Ez magyarul azt jelenti, hogy $n < 2^{k/2}$ esetén van az n csúcsú teljes gráf éleinek olyan színezése, amelynél nincs k olyan pont, hogy a közöttük levő élek mind egyszínűek lennének. Erdős bizonyítása nem konstruktív, ilyen színezés létezését mutatta meg, a színezés nincs explicit módon megadva.

Az $R(k, k) \geq 2^{k/2}$ alsó becslés bizonyítása (Erdős Pál). A bizonyítás nem konstruktív, azt mutatjuk meg, hogy ha $n < 2^{k/2}$, akkor az n csúcsú teljes gráf éleinek van olyan színezése, amelyben nincs egyszínű teljes k-as. Számoljuk meg, hogy legfeljebb hány olyan színezés van, amely tartalmaz egyszínű teljes k-ast. Ehhez a k szóbanforgó pontot $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk. A kiválasztott k pont közötti éleket 2-féleképpen színezhetjük, végül a fennmaradó $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ él színe tetszőleges lehet. Így legfeljebb
$$T = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$$
olyan színezés van, amely tartalmaz egyszínű teljes k-ast. Ez persze nagyon durva felső becslés, mert például egy olyan színezést, amelyben több egyszínű teljes k-as va, többször

számolunk. Így ha van egyszínű teljes $(k+1)$-es, azt legalább $(k+1)$-szer számoltunk, de az a fontos, hogy *minden egyszínű teljes k-ast tartalmazó színezést legalább egyszer megszámoltunk.* Ha a fenti T kifejezés kisebb, mint az össze két színnel való színezések száma, akkor kész vagyunk, megmutattuk egyszínű teljes k-ast nem tartalmazó színezés létezését. Az összes színezések száma $2^{\binom{n}{2}}$, amibe beírva $\binom{k}{2}$ értéket, $\binom{n}{k}$-t pedig $n^k/k!$-sal felülről becsülve azt kapjuk, hogy

$$T \leq \frac{n^k}{k!} 2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{2^{k(k-1)/2}}.$$

A nevezőbeli 2-hatványt $(2^{k/2})^{k-1}$ alakban írva, n helyére a nála nagyobb $2^{k/2}$-t beírva így a

$$T \leq \frac{(2^{k/2})^k}{k!} \cdot \frac{2 \cdot s^{\binom{n}{2}}}{(2^{k/2})^{k-1}}$$

felső becsléshez jutunk. Ez akkor kisebb $2^{\binom{n}{2}}$-nél, ha

$$\frac{2^{k/2+1}}{k!} < 1,$$

ami $k \geq 3$-ra teljes indukcióval könnyen látható, mert a számláló a k-ról $k+1$-re lépésnél $\sqrt{2}$-vel, a nevező viszont $(k+1)$-gyel szorzódik. A kifejezés $k = 3$-ra $\sqrt{32}/6$, ami valóban kisebb 1-nél. ∎

Ramsey tételének színezéssel való megfogalmazása amiatt szerencsés, hogy könnyen általánosítható több színre is. Legyen $R(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ az a legkisebb n, amelyre teljesül, hogy az n csúcsú teljes gráf éleit s színnel *tetszőlegesen* színezve, biztosan találhatunk olyan i-t, amelyre lesz a_i db csúcs úgy, hogy az ezek között menő valamennyi él i színű. Ez a definíció értelmes, ha ugyanis összevonunk két színt, mondjuk az 1-t és a 2-t, akkor ha ebben az összevont színben nem a_1, vagy a_2, hanem $R(a_1, a_2)$ pontot tudunk úgy garantálni, hogy köztük minden él összevont színű, akkor az összevont szín akárhogyan keletkezett az eredeti 1 és 2 színekből, a két színre vonatkozó Ramsey tétel garantálja, hogy vagy lesz 1-es színű teljes a_1-es, vagy 2-es színű teljes a_2-es. Ez az okoskodás azt adja, hogy

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_s) \leq R(R(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_s).$$

Ez a becslés azonban nagyon durvan, az $R(3,3,3)$ esetre $R(3,3) = 6$ miatt csak $R(3,3,3) \leq R(6,3) \leq \binom{6+3-2}{2} = 21$-et ad, míg más módon nemsokára látjuk, hogy $R(3,3,3) = 17$. A két színre vonatkozó Ramsey tétel bizonyítását másolva, és felhasználva azt, hogy ha valamelyik $a_i = 2$, akkor ezt elhagyhatjuk, a több színre vonatkozó feladatot lépésről lépésre visszavezethetjük a két színre vonatkozóra. Ezt részletesen nem tesszük meg, csak arra az esetre illusztráljuk, amikor minden színben csak háromszögeket keresünk.

Ramsey tétele sok színre háromszögekre. Tegyük fel, hogy $R(3, ..., 3) = n$ és itt $t-1$ db 3-as szerepel. Ekkor $R(3, ..., 3, 3) \leq t(n-1) + 2$, ahol a bal oldalon t db 3-as szerepel.

Bizonyítás. A $N = t(n-1)+2$ pontú gráfban egy tetszőlegesen választott p csúcshoz $t(n-1)+1$ él illeszkedik, amelyek t színnel vannak színezve. Lesz tehát a skatulyaelv miatt olyan szín, amelyre több, mint $n-1$ (azaz legalább n) p-ből kiinduló él lett színezve. Ezen élek végpontjai között, ha ugyanez a szín akár egyszer is előfordul, akkor ebből a színből már lesz háromszög. Ha nem, akkor ezen legalább n pont közti élek csak $t-1$ színnel vannak színezve, de akkor a feltétel (t.i. $R(3,...,3) \leq n$ és itt $t-1$ db 3-as van) szerint lesz egyszínű háromszög.

∎

Ennek alapján itt is megadható konkrét becslés a Ramsey-számra, de ennek bizonyítása kicsit nehezebb az előzőnél.

Állítás. $R(3,3,\ldots 3) \leq 1 + \lfloor et! \rfloor$, ahol a bal oldalon t darab 3-as áll.

Bizonyítás. t szerinti indukcióval ($t = 2$ volt gyakorlaton, sőt $t = 3$-at is láttuk). Vegyünk ki egy p csúcsot. Ezen p csúcshoz $\lfloor et! \rfloor$ él illeszkedik, melyek t színosztályba vannak sorolva. Mivel

$$\lfloor et! \rfloor = \lfloor \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t!}{j!} \rfloor = \sum_{j=0}^{t} \frac{t!}{j!} = 1 + t \sum_{j=0}^{t-1} \frac{(t-1)!}{j!} = 1 + t\lfloor e(t-1)! \rfloor,$$

ezen t szín egyike, mondjuk a piros legalább $\lfloor e(t-1)! \rfloor + 1$ p-hez illeszkedő élt tartalmaz. Ha ezen csúcsok között van piros él, akkor azonnal találtunk piros k-ast. Ha nincs piros él, akkor ez a rész csak $t-1$ színnel lett megszínezve, amikor viszont az indukciós feltevés miatt találunk benne egyszínű háromszöget. ∎

Jegyezzük meg, hogy a $t = 2, 3$ esetekben az előző becslés visszaadja a 6 illetve a 17 értékeket, amelyek gyakorlaton szerepeltek.

Megjegyzés. Gyakorlaton volt, hogy $R(4,4) \leq 18$. Igazából ez abból a feladatból következik, hogy $R(3,4) \leq 9$, mert akkor a legelső tételből adódik, hogy $R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) \leq 9 + 9 = 18$ Megmutatjuk, hogy $R(4,4) \geq 18$. Ehhez meg kell adnunk egy 17 csúcsú gráfot, amelyben nincs se teljes 4 pontú részgráf, se 4 olyan pont, amelyek között nincs él. Legyenek a csúcsok a modulo 17 maradékosztályok (azaz $0, ..., 16$). Az i és j csúcsot kösse össze él, ha $i - j$ kvadratikus maradék modulo 17 (azaz 1,4,8,9, vagy 16). Fizikailag ki lehet számolni, hogy nincs négy olyan maradékosztály, hogy bármely kettő különbsége kvadratikus maradék (vagy nem-maradék) legyen. Ezt megkönnyíti, ha észrevesszük, hogy egy ilyen négyest el het tolni, és be lehet szorozni egy kvadratikus maradékkal. Tehát feltehető, hogy 0,1 a maradékosztályaink között van. Innen viszont tényleg számolnunk kell.

Megjegyzés. Az előzőhöz hasonlóan az is igaz, hogy $R(3,3,3) \geq 17$. Ehhez a 16 csúcsú teljes gráf egy színezését kell megadnunk. Legyen P az 5 hosszú kör, csúcsait $V(P)$-vel, éleit $E(P)$-vel jelöljük. Képzeljük a 16 csúcsú gráf csúcshalmazát úgy, mint $V(P)$ páros elemszámú részhalmazainak halmazát. Ha A, B két ilyen részhalmaz, akkor legyen az $\{A, B\}$ él *piros*, ha $A \triangle B$ a P gráf éle, *kék*, ha $A \triangle B$ a P komplementerének éle, végül az $\{A, B\}$ él legyen *zöld*, ha $|A \triangle B| = 4$. Itt $A \triangle B$ az A és B halmazok szimmetrikus differenciáját jelöli. Erről a színezésről megmutatható, hogy egyik színben sincs benne háromszög. Ehhez a szimmetrikus differencia asszociativitását kell felhasználni.

Feladat. Igaz-e, hogy $R(4, 3) \leq 8$?

A következő állítás a Ramsey tétel egy tipikus alkalmazását mutatja be.

Tétel. (Schur) Ha az első n természetes számot k osztályba osztjuk, ahol $n \geq ek!$, akkor az egyik osztály tartalmaz három olyan x, y, z számot, amelyekre $x + y = z$.

Bizonyítás. Legyen $\{A_1, \ldots, A_k\}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ szóban forgó partíciója. Tekintsük azt a teljes gráfot, amelynek csúcsai az $\{1, 2 \ldots, n + 1\}$ elemei, és színezzük az i és j csúcsokat összekötő élt a ν színnel, ha $|i - j| \in A_i$. Az előző tétel miatt találunk három olyan pontot, $i < j < k$-t úgy, hogy a közöttük menő élek azonos színűek. Ez viszont azt jelenti, hogy az $x = j - i$, $y = k - j$ és $z = k - i$ elemek ugyanazon A_ν-ben vannak és persze $z = x + y$. ∎

Feladat. Színezzük ki k színnel egy n elemű halmaz nemüres részhalmazait. Biz. be, hogy ha n elég nagy ($n \geq ek!$), akkor van két diszjunkt nemüres részhalmaz, X és Y, amelyekre X, Y és $X \cup Y$ színe azonos.

Feladat. Adjunk felső becslést $R(3, 3, 4)$ értékére!

Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$R(a_1, \ldots, a_s) \leq R(a_1-1, a_2, \ldots, a_s) + R(a_1, a_2-1, \ldots, a_s) + \ldots + R(a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s-1) - s + 2. \blacksquare$$

A teljes gráf élei éppen a csúcsok kételemeű részhalmazai. Ehelyett az r elemű részhalmazokat is tekinthetnénk és erre az esetre is általánosíthatjuk a Ramsey-tételeket.

Tétel (Ramsey). Bármely, r, $s \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_s \geq r$ természetes számokra van olyan n_0, amelyre $n \geq n_0$-ra n elemű A halmaz r-eseit s színnel tetszőlegesen színezve van olyan i és $A_i \subseteq A$, $|A_i| = a_i$, amelynek minden r-ese az i. színre van színezve.

Ezt nem fogjuk bizonyítani, azonban egy-két alkalmazásáról szólunk néhány szót. A legkisebb n-et, amelyre a tétel állítása igaz, $R^r(a_1, \ldots, a_s)$-sel jelöljük.

Erdős Pál és Szekeres György vizsgálta a következő kérdést: Van-e olyan N, amelyre a sík N általános helyzetű pontja közül biztosan kiválasztható t olyan, amelyek konvex t-szög csúcsai. Itt az általános helyzet azt jelenti, hogy az N pont között nem lehet három egy egyenesen levő. Ez a feltétel csak a triviális esetek kizárására szolgál, pl. arra, hogy ne lehessenek a pontok mind egy egyenesen, mert akkor még háromszög sem választható ki közülük. A bizonyítást mi csak vázoljuk. Kulcsfontosságú az alábbi, Klein Esztertől (később Szekeres György felesége lett) származó észrevétel.

Állítás. Öt általános helyzetű pont közül mindig kiválasztható konvex négyszög.

Fontos észrevétel az is, hogy egy sokszög konvexsége résznégyszögei konvexségétől függ.

Állítás. A síkon n általános helyzetű pont akkor és csak akkor konvex helyzetű, ha bármely négy pontja konvex helyzetű.

Ezekből már nem nehéz belátni Erdős és Szekeres alábbi tételét.

Tétel. Bármely $t \geq 3$ esetén létezik olyan $K(t)$ szám, hogy minden legalább $K(t)$ elemű általános helyzetű síkbeli ponthalmazból kiválasztható t konvex helyzetű pont. (Jelölje $K(t)$ a legkisebb ilyen számot.)

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlít a Ramsey-számok becslése utáni példára. Válasszuk $K(t)$-nek az $R^4(t, 5)$ Ramsey-számot. Színezzük az $n \geq K(t)$ elemű ponthalmaz négyeseit pirosra illetve kékre, aszerint, hogy konvex vagy konkáv helyzetűek. A Ramsey-tétel szerint vagy létezik t olyan pont, amelynek minden négyese piros, vagy pedig van 5 olyan pont, amelynek minden négyese kék. Ez utóbbi Klein Eszter észrevétele szerint nem fordulhat elő, az előbbi pedig azt jelenti, hogy a t pont konvex helyzetű (ld. előző állítást.). ∎

Erdős és Szekeres azt is belátták, hogy a mostaninál sokkal jobb becslést is lehet adni $K(t)$-re:

$$2^{t-2} + 1 \leq K(t) \leq \binom{2t-4}{t-2} + 1.$$

Több hasonló Ramsey-jellegű probléma vethető fel, mi egy Erdőstől és Szekerestől származót tárgyalunk még.

Feladat. Mutassuk meg, hogy van olyan $M(k, \ell)$ szám, hogy minden csupa különböző tagból álló $n \geq M(k, \ell)$ elemű valós sorozatnak vagy van k hosszú monoton növő, vagy van ℓ hosszú monoton csökkenő részsorozata.

Talán meglepő, hogy az $M(k, \ell)$ létezésére nagyon egyszerű bizonyítás adható a skatulyaelv segítségével.

Tétel (Erdős–Szekeres). $M(k, \ell) \leq k\ell + 1$.

(Jelölje $K(t)$ a legkisebb ilyen számot.)

Bizonyítás. Legyenek a sorozat elemei $x_1, \ldots x_n$, $n \geq k\ell + 1$. Minden x_i-hez rendeljük hozzá azon (a_i, b_i) számpárt, amelyre a_i az x_i-vel kezdődő leghosszabb monoton növő, b_i pedig a leghosszabb monoton csökkenő részsorozat hossza. Könnyű meggondolni, hogy különböző i-kre nem lehet azonos az (a_i, b_i) számpár. Ha a sorozatban nincsen a kívánt monoton részsorozat, akkor az (a_i, b_i) pároknak $k\ell$ lehetséges értéke van. Ez viszont a skatulyaelv szerint ellentmondás. ∎