A Prüfer kód

Legyen adott a $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ pontokon egy fa. Ehhez egy $n-2$ hosszú számsorozatot rendelünk, amelynek minden eleme $0, 1, \dots, n-1$ valamelyike. Hagyjuk el a fa *elsőfokú* pontjai közül a legkisebb nem-nulla indexűt, és jegyezzük fel a vele összekötött *egyetlen* pont sorszámát. Legyen ez v_1. Ismételjük meg ezt az eljárást a maradék fára, mindaddig, amíg csak egyetlen él marad. Ebben a pillanatban mindkét csúcs elsőfokú, az egyik pont a 0 sorszámú (hiszen minden pillanatban legalább kát első fokú pontunk van, így a 0 sorszámú pontot nem törölhettük). Ekkor tehát az eljárást folytatva az 0 sorszámot tüntetnénk fel a sorozatban, de ezt már nem tesszük meg. (Néha ezt is meg szokták tenni, mi általában a rövidebb Prüfer-kóddal dolgozunk.) Így valóban $n-2$ hosszú sorozatot kapunk, melyet a fa *Prüfer-kódjának* nevezünk.

Tétel. Minden $n-2$ hosszú a $0, 1, \dots, n-1$ elemekből álló sorozathoz tartozik egy fa, amelynek ő a Prüfer-kódja.

Bizonyítás. Abból, hogy hány számból áll a Prüfer-kód, könnyű meghatározni v_{n-1}-et (amit már nem írtunk bele a sorozatba), hiszen ez mindig 0. Legyen w_k az a sorszám, amely sorszámú csúcs elhagyásánál v_k-t felírtuk a sorozatba. Ha tehát meghatározzuk w_k-t, akkor ezzel egyértelműen rekonstruáltunk egy gráfot (csak abban nem lehetünk biztosak, hogy ez fa). w_0 a legkisebb olyan 1 és $n-1$ közötti szám, amely nem fordul elő a Prüfer-kódban. Általában pedig w_k a *legkisebb* olyan 1 és $n-1$ közötti szám, amely nem fordul elő a $w_0, \dots, w_{k-1}$, $v_k, \dots v_{n-2}, v_{n-1} (= 0)$ számok között. Mivel legfeljebb $n-1$ számot zártunk ki, ez a w_k egyértelműen meghatározott.

Ezzel tehát megkaptuk a gráfunk $\{v_0, w_0\}$, $\{v_1, w_1\}$, …, $\{v_{n-2}, w_{n-2}\}$ éleit. Ahhoz hogy gráfunk fa legyen, elegendő megmutatni, hogy körmentes. Tényleg, gyakorlaton beláttuk, hogy k komponensű körmentes gráfnak (erdőnek) pontosan $n-k$ éle van. Mivel a jelen gráfnak $n-1$ az élszáma, így $k = 1$, azaz gráfunk összefüggő, és így fa. Indirekte tegyük fel, hogy a kapott gráfban van kör. Minden egyes újabb w_i felírásakor egy újabb pontját és egy újabb élét kapjuk meg a gráfnak. Tekintsük azt a pillanatot, amikor a kör utolsó élét kapjuk meg. Ekkor két korábban már felírt pont közti élt kapnánk meg, azaz w_i már korábban felírt csúcs lenne, de ez az eljárásban nem lehetséges. ∎

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás második részét úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy az éleket jobbról balra lerajzolva éppen a fanövesztési eljárás szerint rajzoljuk fel a fát (méghozzá a w csúcs az új elsőfokú csúcs, az alatta levő érték pedig korábban (jobbról balra nézve) szerepel a sorozatban).

Figyelembe véve, hogy n^{n-2} a feltételünknek eleget tevő sorozat van, azonnal kapjuk CAYLEY tételét.

Tétel. (CAYLEY) Az $\{1, 2, \dots n\}$ pontokon n^{n-2} különböző fa adható meg. ∎

A tételben a fák számozottak, tehát az izomorf, de különbözőképpen számozott fákat külön számoljuk (ilyen pl. az $1-2-3$ és az $1-3-2$ út $n=3$-ra).

A Prüfer kódról részletesen a Lovász-Pelikán-Vesztergombi könyvben olvashatunk.

Feladatok:

1., Mutassuk meg, hogy az eljárás befejezésekor megmaradó két pont egyike a 0 indexű.

2., A Prüfer kódban az i szám éppen $d_i - 1$-szer fordul elő, ahol d_i az i pont foka.

3., Bizonyítsuk be, hogy minden kódhoz pontosan egy fa tartozik!

4., Bizonyítsuk be (egészítsük ki a fenti vázlatot) a Cayley tételt!

5., Melyik az a fa, amelyben Prüfer kódja 01234567?

6., Egy fa csúcsai $\{0,1,\ldots,7\}$. Tudjuk, hogy minden csúcsa páratlan fokú. Mi lehet X, ha ezen fa Prüfer kódja $115X33$? Rajzoljuk is le ezt a fát (ezeket a fákat)!

7., Hogy nézhet ki egy fa, ha Prüfer-kódjában csupa azonos szám szerepel? És ha pontosan kétféle?

8., Prüfer-kóddal oldjuk meg, hogy $d_0,\ldots,d_{n-1}$ pontosan akkor fa fokszám-sorozata, ha $d_0+\ldots+d_{n-1}=2(n-1)$.