Gráfparaméterek

Ebben a részben az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nincsenek a gráfban hurokélek. Arról, hogy mi lenne, ha ezt nem tennénk, a szakasz végén lesz egy megjegyzés.

Definíciók. A $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy A részhalmaza *független csúcshalmaz*, ha nincs olyan él, amelynek mindkét végpontja A-beli. (Azaz az A által feszített részgráfnak nincs éle.) A független csúcsok *maximális* számát $\alpha(G)$ jelöli. A $B \subseteq V$ csúcshalmaz *lefogó csúcshalmaz*, ha minden élnek legalább az egyik végpontja B-ben van. A lefogó csúcsok *minimális* számát $\tau(G)$ jelöli.

Azért a maximális illetve a minimális számot vesszük, mert független csúcshalmaz részhalmaza is független csúcshalmaz, így a legnagyobb érdekel minket, és hasonlóan lefogó csúcshalmaznál bővebb csúcshalmaz automatikusan lefogó, így itt a legkisebb érdekel minket.

A definícióból nyilvánvaló az alábbi állítás.

1. Állítás. Független csúcshalmaz komplementere lefogó csúcshalmaz és viszont.
2. Következmény. $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$, azaz a csúcsok száma.

A megfelelő fogalmak élhalmazokra az alábbiak.

Definíciók. A $G = (V, E)$ gráf éleinek egy A részhalmaza *független élhalmaz*, ha A semelyik két elemének nincs közös végpontja. Erre a (részleges) párosítás elnevezést is használjuk. A független élek maximális számát $\nu(G)$ jelöli. A $B \subseteq V$ élhalmaz *lefedő élhalmaz*, ha minden csúcs valamely B-beli élnek végpontja. A lefedő élek minimális számát $\varrho(G)$ jelöli.

Megint az a helyzet, hogy független élhalmaz bármely része független, lefedő élhalmaznál bővebb halmaz pedig lefedő, ez indokolja, hogy a maximális illetve a minimális ilyen halmazok elemszámát tekintjük.

Jegyezzük meg, hogy lefedő élhalmaz csak akkor létezhet, ha a gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, ezt tehát mindig feltesszük, ha egy állításban $\varrho(G)$ szerepel.

Nagyon egyszerűen láthatók az alábbiak.

3. Állítás. $\nu(G) \leq \tau(G)$ és $\alpha(G) \leq \varrho(G)$.

Bizonyítás. Független élhalmaz minden élének lefogásához legalább az él egyik végpontjára szükségünk van, és ezek a csúcsok páronként különbözőek.

Hasonlóan, független csúcshalmaz minden csúcsának lefedéséhez kell legalább egy az adott csúcsból kiinduló él, és különböző csúcsokra ezen élek különbözőek.

Általában a 3. Állításban nincsen egyenlőség, pl. a $G = K_3$ (3 csúcsú teljes gráf) esetén $\alpha = \nu = 1$, míg $\tau = \varrho = 2$.

Talán meglepő, hogy a fenti α és τ közti összefüggés élekre vonatkozó megfelelőjében is a csúcsok száma szerepel.

4. Tétel. $\varrho(G) + \nu(G) = |V(G)|$, ha G-ben nincs izolált csúcs.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\nu(G)$ elemű független élhalmazt. Ezek az élek $2\nu(G)$ csúcsot fednek. (Ezen a ponton használjuk, hogy nincsenek hurokélek, pontosabban azt, hogy független élhalmaz nem tartalmazhat hurokélt.) A kimaradó $|V(G)| - 2\nu(G)$ db csúcs mindegyikéhez tetszőlegesen választva egy az adott csúcsból kiinduló élt egy legfeljebb $\nu(G) + (|V(G)| - 2\nu(G))$ elemű lefedő élhalmazt kapunk, így $\varrho(G) + \nu(G) \leq |V(G)|$.

Megfordítva, induljunk ki egy lehető legkevesebb élt tartalmazó lefedő élhalmazból. Ez nem tartalmazhat kört (tehát erdő), mert abból egy él (igazából minden második él) elhagyható lenne. Sőt 3 hosszú (3 élből álló) utat sem tartalmazhat a legkisebb lefedő élrendszer, hiszen abból a középső él elhagyható lenne. Ez azt jelenti, hogy a legkisebb méretű lefedő élrendszer csupa csillagból kell álljon. Ha a komponensek száma k, akkor ez a legkisebb lefedő élrendszer $|V(G)| - k$ élt tartalmaz. Kiválasztva egy-egy élt minden komponensből k db független élt kapunk, így $k \leq \nu(G)$. Kaptuk, hogy $\varrho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|$.

Ezek az összefüggések Gallai Tibortól származnak. Ezzel a terminológiával a páros gráfokra megismert Kőnig tétel azt mondja, hogy $\nu = \tau$ páros gráfokra. Gallai tételeiből az is következik, hogy izolált csúcsot nem tartalmazó páros gráfokra $\alpha = \varrho$. Feladatokban Gallai tételét úgy használhatjuk, hogy az $\alpha, \tau, \nu, \varrho$ paraméterek közül elég (alkalmas) kettőt meghatározni, akkor már mindet ismerjük.

Megjegyzés. Ha a gráfban vannak hurokélek, akkor a független csúcshalmazt kétféleképp is definiálhatnánk. Ha azt mondjuk, hogy a független csúcshalmaz semelyik két pontja között nincs él, az az jelenti, hogy a független csúcshalmaz csúcsaiban lehetnek hurokélek. Ha mondjuk G az a 3 csúcsu gráf, amelyben minden csúcsban egy hurokél van, akkor $\alpha = 3$, $\tau = 3$ lenne, vagyis nem lenne igaz az $\alpha + \tau =$ csúcsok száma egyenlőség. Tehát ezen definícióval a 2. Következményben fel kell tennünk, hogy nincs a gráfban hurokél. Megkövetelhetjük azt is, hogy független csúcshalmaz csúcsaiban ne legyenek hurokélek, ekkor a fenti példában $\alpha = 0$ és általában is igaz a 2. Következmény.

Hasonló a helyzet az élekre vonatkozó definícióval, ha a független élek fentebbi definícióját szó szerint vesszük, akkor két különböző csúcsbeli hurokél független. A fenti példában tehát $\nu = 3$, $\varrho = 3$ volna, azaz nem teljesülne a 4. Tétel. Ha a független élhalmazban nem engedünk meg hurokéleket, akkor a fenti példában $\nu = 0$ lenne, és általában is ha nincsenek izolált csúcsok, akkor teljesül ezen definícióval a 4. Tétel.

Összefoglalva, ha a gráfban megengedünk hurokéleket, akkor úgy érdemes mind a független élhalmazt, mind a független csúcshalmazt definiálni, hogy ezekben (ill. a csúcsaiban) ne lehessenek hurokélek, mert akkor a 2. Következményhez nincs szükség további feltételre, a 4. Tételhez pedig csak az izolált csúcsok nemlétezésére van szükség, amire már a ϱ definiálásához is szükségünk van. A 4. Tétel bizonyításában zárójelben külön kiemeltem azt a lépést, ahol a hurokélekkel kapcsolatos megszorítást használtuk.

Ez a definíció azért is jó, mert így azt mondhatjuk, hogy a gráf csúcsainak egy jólszínezésénél éppen egy független csúcshalmaz, éleinek jólszínezésénél egy független élhalmaz elemeit színezhetem azonos színre. Ebből az észrevételből következik az, hogy a kromatikus számra $\chi \geq n/\alpha$, az élkromatikus számra pedig $\chi_e \geq e/\nu$ teljesül, ahol n a csúcsok, e az élek száma. Persze a kromatikus számmal való kapcsolat is alátámasztja azt a kezdeti feltételünket, hogy egyáltalán ne legyenek hurokélek a gráfban.