Fák

Ennek a kis összefoglalónak az a célja, hogy a fákról elhangzott legfontosabb dolgokra emlékezzünk. A bizonyítások megtalálhatók az LPV Diszkrét matematika könyvben, de az állítások sorrendje lényeges.

Definíció. A G gráfot *fának* nevezzük, ha összefüggő és körmentes. Ha G körmentes, akkor *erdő*nek nevezzük (hiszen komponensei fák).

Definíció. A G gráf F részgráfját G *feszítő fájának* nevezzük, ha F fa és csúcshalmaza G minden csúcsát tartalmazza.

Az előadáson/gyakorlaton beláttuk az alábbi fontos dolgokat:

(1) Ha van a-ból b-be vezető séta G-ben, akkor van a-ból b-be vezető út is.

(2) Ha egy gráfban van olyan körséta, amelyben van csak egyszer szereplő él, akkor van a gráfban kör is.

(3) Összefüggő gráf egy körének bármely élét elhagyva a gráf összefüggő marad.

(4) Összefüggő gráfnak van feszítő fája.

(5) Ha egy n csúcsú gráf összefüggő, akkor legalább $n-1$ éle van.

(6) Legalább kát csúcsú, legalább egy élű körmentes gráfban van (legalább két) elsőfokú csúcs.

(Egy **leghosszabb út** végpontjaiból csak ezen út valamely pontjához vezethetne él, mert ő leghosszabb. A körmentesség miatt azonban ide sem mehet él, azaz a végpontok elsőfokúak.)

(7) Összefüggő gráf egy elsőfokú csúcsát törölve összefüggő gráfot kapunk.

(8) Ha egy gráf minden csúcsának foka legalább kettő, akkor van a gráfban kör.

Definíció. Fa egy elsőfokú csúcsát *levél*nek nevezzük.

Fák alternatív definíciói: Egy $n \geq 2$ csúcsú gráfra ekvivalensek:

i) összefüggő és körmentes (azaz fa);

ii) bármely két pontját pontosan egy út köti össze.

iii) összefüggő, de bármely élét törölve már nem marad az (fa = minimális összefüggő gráf);

iv) nem tartalmaz kört és bármely két (összekötetlen) pontját összekötve pontosan egy kör keletkezik (fa = maximális körmentes gráf).

Fanövesztés: Minden n csúcsú fa előáll egy $n-1$ csúcsú fából úgy, hogy egy új elsőfokú csúcsot összekötünk a fa tetszőleges csúcsával.

Tétel. n csúcsú fának $n-1$ éle van.

Következmény. n csúcsú, k komponensű erdőnek $n-k$ éle van. Tehát n csúcsú körmentes gráfnak (erdőnek) legfeljebb $n-1$ éle van.

(Gyakorlaton volt: ha a komponensek $n_1, ...n_k$ csúcsúak, akkor $n_1 + \ldots + n_k = n$ és az egyes komponenseknek rendre $n_i - 1$ éle van. Így az élszám $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = n - k$.)

Tétel. Egy $n \geq 2$ pontú gráfra ekvivalensek az alábbiak:

i) Nem tartalmaz kört és $n-1$ éle van;

ii) összefüggő és körmentes (azaz fa);

iii) összefüggő és $n-1$ éle van;

Bizonyítás. i)$\rightarrow$ ii): Csúcsszám szerinti teljes indukcióval, $n = 2$-re triviális. Vegyünk egy elsőfokú pontot (ilyen van, ld. (6)). Ezt elhagyva $n-1$ csúcsú, $n-2$ élű továbbra is körmentes gráfot kapunk. Az indukciós feltevés szerint ez összefüggő, de akkor az eredeti gráf is.

ii)$\rightarrow$ iii): Ez a fenti tétel.

iii))$\rightarrow$ i): összefüggő és $n-1$ élű gráfban nem lehet kör, mert annak egy élét elhagyhatnánk (3) szerint. Akkor viszont $n-2$ élű és n csúcsú összefüggő gráfot kapnánk, ami (5) szerint nem lehetséges.